CHAPITRE I : TRANSFORMÉES DE LAPLACE

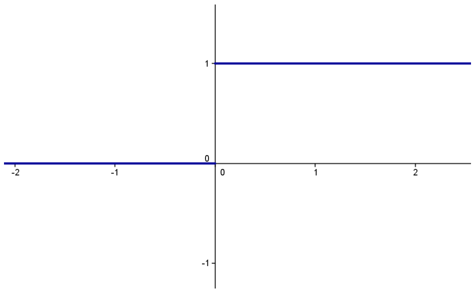
A. FONCTIONS CAUSALES

Définition : Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ est causale si : Pour tout $t < 0$, $f(t) = 0$.

1. Echelon unité

Définition : L'échelon unité $\mathcal{U}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0$$
$$\mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0$$

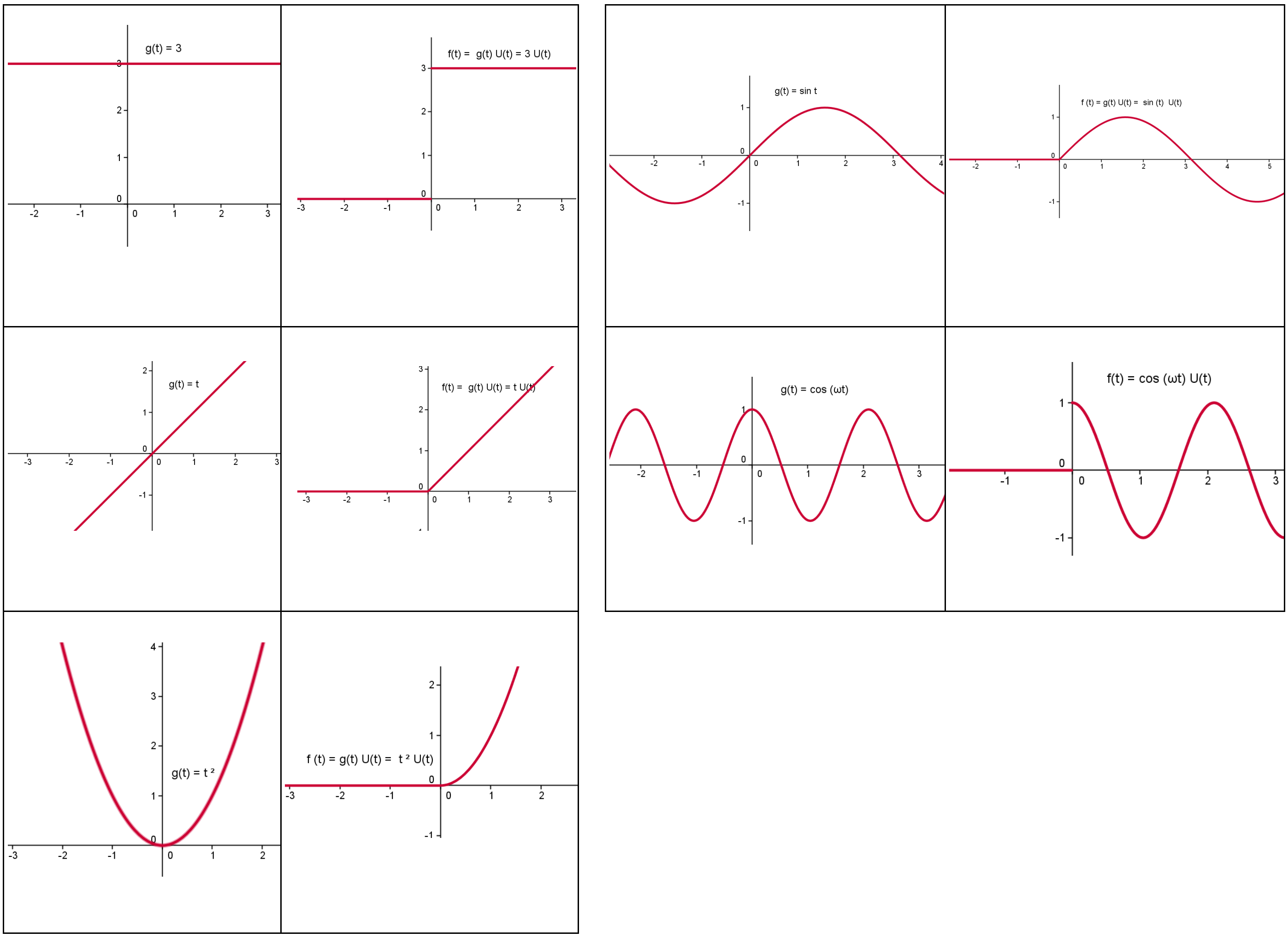


Remarque : $\mathcal{U}$ est constante par morceaux. Elle est discontinue en 0.

2. Utilisation de l'échelon unité

Définition : Pour transformer une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ en une fonction causale f prenant les mêmes valeurs sur $[0 ; +\infty[$, on la multiplie par l'échelon unité : $f(t) = \mathcal{U}(t)g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

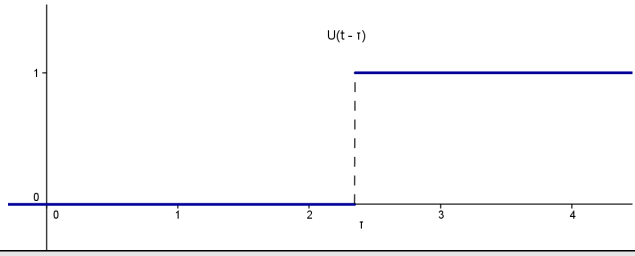
Exemples



3. Translation d'une fonction causale

a. Echelon unité

Considérons la fonction translatée de l'échelon unité ayant le saut à l'instant $t = \tau$.
On a : $h(t) = 0$ si $t < \tau$
$h(t) = 1$ si $t \geq \tau$
On peut alors écrire : $h(t) = \mathcal{U}(t - \tau)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
En effet : $\mathcal{U}(t - \tau) = 0$ si $t - \tau < 0$ soit $t < \tau$
$\mathcal{U}(t - \tau) = 1$ si $t - \tau \geq 0$ soit $t \geq \tau$



Proposition : La translatée de vecteur $\tau\,\vec{i}$ de l'échelon unité est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{U}(t - \tau)$.

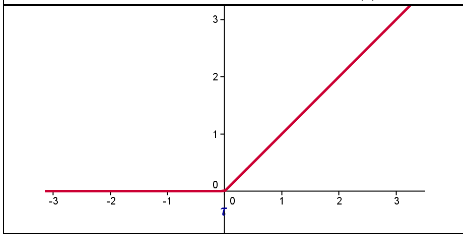
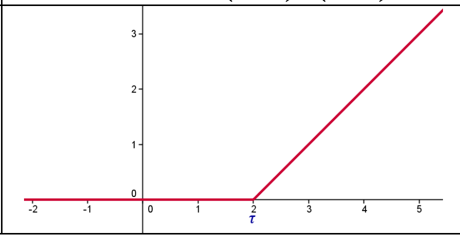
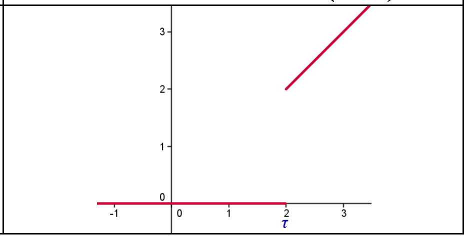
b. Cas usuels

Proposition : La translatée de vecteur $\tau\,\vec{i}$ de toute fonction causale de la forme $f(t)U(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t - \tau)\mathcal{U}(t - \tau)$.

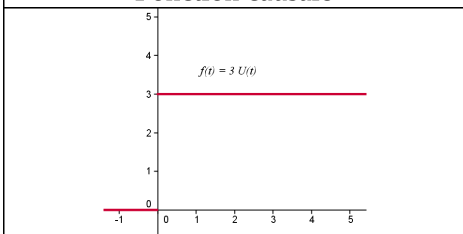
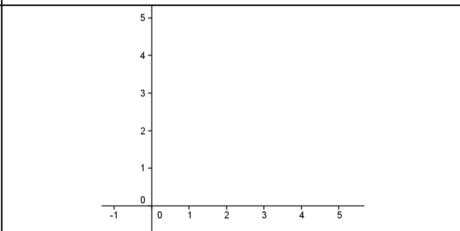
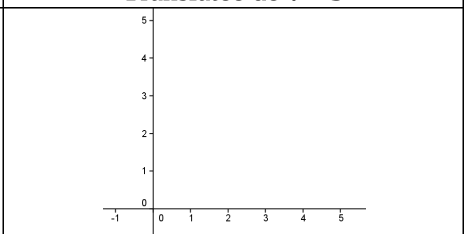
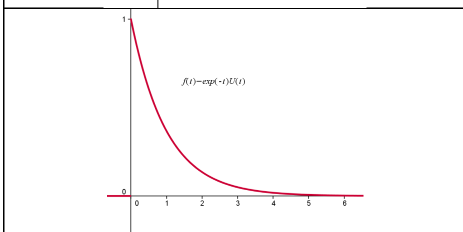
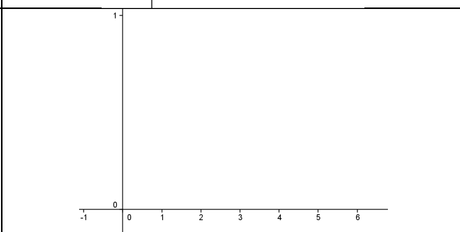
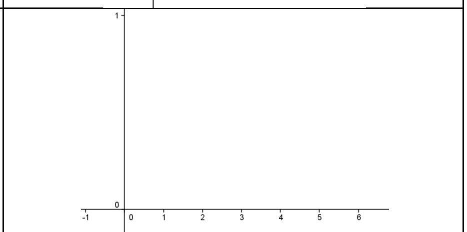
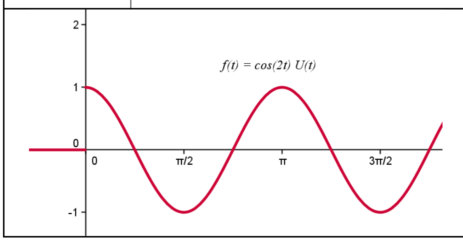
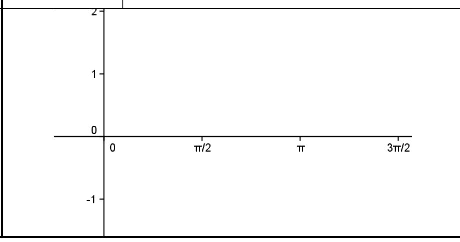
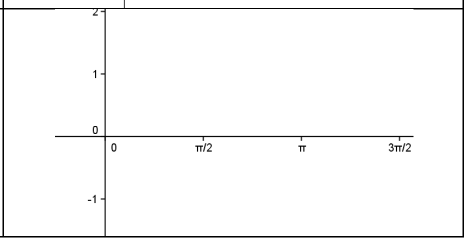
Remarque :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t)\ \mathcal{U}(t - \tau)$ n'est **pas** la translatée de la fonction $f(t)U(t)$, c'est une fonction qui prend les mêmes valeurs que f sur l'intervalle $[\tau\ ;\ +\infty[$.

Exemple :

Fonction causale : $t\ U(t)$	Translatée : $(t-2)\mathcal{U}(t-2)$	Fausse translatée : $t\ \mathcal{U}(t-2)$
		

Exercice : Dans chaque cas tracer les translatées demandées des fonctions causales données.

Fonction causale	Translatée de τ = 1	Translatée de τ = 3
		
		
		

B. INTEGRALES IMPROPRES

1. Généralités

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle [a ; +∞[et continue par morceaux. Soit A un nombre réel.

Si : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt = A$ alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et égale au nombre A.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale impropre est divergente.

Exemples : Etudier la convergence $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$:

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt =$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt =$

Remarques : 1. On peut définir de même : $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$.

2. Les propriétés de l'intégrale restent valables.
3. La densité de probabilité de la loi normale centrée réduite N(0,1) est une fonction dont l'intégrale sur ℝ converge et vaut 1. On a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$

2. Convergence d'intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème (admis) : Soit n un nombre entier naturel et soit λ un nombre complexe.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\lambda < 0$.

Si $\lambda \in$ Ê, $\int_0^{+\infty} t^n e^{\lambda t} dt$ converge si et seulement si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Exercice : Etudier la convergence des intégrales suivantes avec $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} dt$

2. $\int_0^{+\infty} t e^{\lambda t} dt$

C. TRANSFORMÉE DE LAPLACE

1. DÉFINITION

Définition : La transformée de Laplace d'une fonction causale f est la fonction F de la variable réelle ou complexe p définie par : $F(p) = (\mathcal{L}f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$

Remarques : 1. La transformée de Laplace F n'existe que si l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$ converge.

2. Les fonctions causales utilisées en électricité (et donc dans ce cours) sont de la forme : $f(t) = U(t)t^n e^{rt}$ avec n ∈ É et r ∈ Ê, elles admettent une transformée de Laplace pour Re(r) > 0.

3. Dans la pratique pourtant on ne précisera pas les valeurs de p pour lesquelles F(p) existe.

2. TRANSFORMÉE DE LAPLACE DES FONCTIONS USUELLES

1) Transformée de Laplace de l'échelon Unité : $f(t) = U(t)$

Propriété :

La transformée de Laplace de la fonction échelon unité est définie pour p > 0 et on a $F(p) = (\mathcal{L}U)(p) = \frac{1}{p}$.

On écrit généralement par abus de langage : $\mathcal{L}[U(t)] = \frac{1}{p}$.

Démonstration : Voir le paragraphe B2 : Il faut calculer $\int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt =$

2) Transformée de Laplace de la fonction rampe : $f(t) = t\,U(t)$

Propriété :

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour tout p > 0 et on a : $F(p) = \mathcal{L}(tU(t))(p) = \frac{1}{p^2}$.

Démonstration : Voir le paragraphe B2 : Il faut calculer $\int_0^{+\infty} te^{-pt}\,dt =$

3) Transformée de Laplace de $f(t) = t^n\, U(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$

Propriété :

La transformée de Laplace de $t \longmapsto t^n\, U(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est définie pour tout p > 0 et on a : $F(p) = \mathcal{L}[t^n U(t)](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Démonstration admise

4) Transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at}\, U(t)$ avec a∈ Ê

Propriété :

La transformée de Laplace de $t \longmapsto e^{-at}\, U(t)$ est définie pour tout Re(p) > Re(a) et : $F(p) = \mathcal{L}\,[e^{-at}\, U(t)](p) = \frac{1}{p+a}$

Démonstration : (au dos)

D. PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE

1. LINÉARITÉ

Théorème : Soient f et g deux fonctions dont les transformées de Laplace sont $\mathcal{L}[f]$ et $\mathcal{L}[g]$ et k un réel.

- $\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$.
- $\mathcal{L}[kf] = k\,\mathcal{L}[f]$.

Démonstration :
On utilise la linéarité de l'intégrale.

Propriété : Pour tout $\omega \in$ IR, on a $\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\, U(t)\right](p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\, U(t)\right](p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Démonstration :
On utilise les formules d'Euler et la linéarité de l'intégrale :

cos (ωt) =

2. THÉORÈME DU RETARD

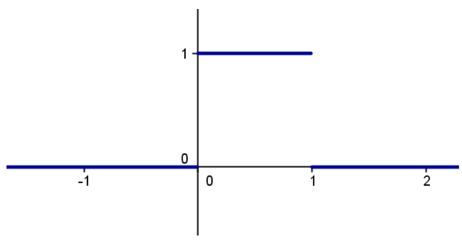
On regarde ce qui se passe si le signal, au lieu de commencer à l'instant $t = 0$, commence à l'instant $t = \tau$ avec $\tau > 0$.

Théorème du retard: Soit $\tau \in$ IR.
Si $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$, alors $\mathcal{L}[f(t-\tau)U(t-\tau)](p) = e^{-\tau p}\, F(p)$.

Démonstration :

On calcule $\mathcal{L}\left[f(t-\tau)U(t-\tau)\right](p) = \int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}\,dt$. Posons $I(x) = \int_0^{x} f(t-\tau)e^{-pt}\,dt$ pour tout $x \in$ IR^{+*}.

Application : Transformée de Laplace d'un signal créneau



On considère le signal : $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in]0;1[\\ 0 \quad\quad \text{sinon} \end{cases}$

- Exprimer la fonction f à l'aide de l'échelon unité :

f(*t*) =

En déduire la transformée de Laplace du signal créneau :

$\mathscr{L}[f]$ (p) =

3. EFFET D'UN CHANGEMENT D'ÉCHELLE SUR LA VARIABLE

Théorème : Soit $\alpha \in]0 ; +\infty[$,

Si $F(p) = \mathscr{L}[f(t)U(t)](p)$, alors $\mathscr{L}[f(\alpha t)U(t)](p) = \frac{1}{\alpha} F(\frac{p}{\alpha})$.

Démonstration :

$F(p) = \mathscr{L}[f(t)U(t)](p) = \int_0^{+\infty} f(\alpha t)U(t)\, e^{-pt}\, dt$.

On pose, pour tout $x > 0$, $I(x) = \int_0^{x} f(\alpha t)\, e^{-pt}\, dt$.

On effectue le changement de variable $y = \alpha t$, d'où $dy = \alpha dt$.

Ainsi $I(x) =$

4. EFFET DE LA MULTIPLICATION PAR e^{-at} avec $a \in$ IR

Théorème : Soit $a \in \mathbb{R}$.

Si $F(p) = \mathscr{L}[f(t)U(t)](p)$, alors $\mathscr{L}[f(t)e^{-at}U(t)](p) = F(p + a)$.

Démonstration :

$\mathscr{L}[f(t)e^{-at}U(t)](p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-at}\, e^{-pt}\, dt$.

$=$

Exemple : Calculer : $\mathscr{L}[te^{-3t}U(t)]$ (p)

5. TRANSFORMÉE D'UNE DÉRIVÉE

Théorème : Soit f une fonction continue sur]0 ; +∞[, dérivable par morceaux sur]0 ; +∞[et dont la dérivée est continue par morceau sur]0 ; +∞[.

Si $F(p) = \mathcal{L}[f(t)U(t)](p)$, alors $\mathcal{L}[f'(t)U(t)](p) = pF(p) - f(0^+)$.

Remarque :

On note $f(0^+)$ la limite à droite en 0 de f.

Démonstration :

On suppose que f est de classe C^1 (continue, dérivable et de dérivée continue) sur]0 ; +∞[:

$\mathcal{L}[f'(t)U(t)](p) = \int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-pt}\, dt$.

On pose pour tout $x > 0$, $I(x) = \int_0^{x} f'(t)\, e^{-pt}\, dt$.

On procède à l'aide d'une intégration par parties :

Exercice : Retrouver la transformée de Laplace de cos (ωt) en partant de celle de sin (ωt).

Théorème : Soit f une fonction de classe C^2 sur]0 ; +∞[, admettant une transformée de Laplace.

Si $F(p) = \mathcal{L}[f(t)U(t)](p)$, alors $\mathcal{L}[f''(t)U(t)](p) = p^2F(p) - p\, f(0^+) - f'(0^+)$.

Démonstration :

On sait que $f'' = (f')'$

Posons $g = f'$. Donc g est de classe C1 sur]0 ; +∞[. On peut donc lui appliquer le théorème précédent.

6. TRANSFORMÉE DE LAPLACE D'UNE PRIMITIVE

Théorème : Soit f une fonction causale et soit $\phi(t) = \int_0^t f(u)U(u)\,du$ la primitive de f qui s'annule en 0.

Si $F(p) = \mathscr{L}[f(t)U(t)](p)$, alors $\mathscr{L}[\phi(t)](p) = \frac{1}{p}F(p)$ pour $p \neq 0$.

Démonstration : admise

Exercice : Retrouver la transformée de Laplace $(1 - e^{-t})U(t)$ en partant de celle de $e^{-t}U(t)$.

7. DÉRIVÉE D'UNE TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Théorème : Si $F(p) = \mathscr{L}[f(t)U(t)](p)$, alors $F'(p) = \mathscr{L}[-tf(t)U(t)](p)$

Démonstration : admise

Exemple : Déterminer la transformée de Laplace de la fonction : $g(t) = t \sin t\, U(t)$.

8. THÉORÈMES DE LA VALEUR INITIALE ET FINALE

Théorème : Si $F(p) = \mathscr{L}[f(t)U(t)](p)$ et si les limites des fonctions considérées existent, on a :

- Théorème de la valeur initiale : $\lim\limits_{p \to +\infty} pF(p) = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$.
- Théorème de la valeur finale : $\lim\limits_{p \to 0^+} pF(p) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

Démonstration : admise

E. CALCUL D'UN ORIGINAL

Définition : Si $F(p) = \mathscr{L}[f(t)U(t)](p)$, on dit que f est l'original de F. On note $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(p)]$

Exemple 1 : Calculer l'original de $F(p) = \dfrac{3}{p^2}$

Exemple 2 : Calculer l'original de $F(p) = \dfrac{1}{(p+4)^3}$

Exemple 3 : Calculer l'original de $F(p) = \dfrac{1}{p^2+9}$

Exemple 4 : Calculer l'original de $F(p) = \dfrac{e^{-2p}}{p + \frac{1}{2}}$

Exemple 5 : Calculer l'original de $F(p) = \dfrac{p\, e^{-2p}}{p^2+5}$

Remarque :
On utilise souvent la décomposition en éléments simples.

Exemple 6 : Calculer l'original de $F(p) = \dfrac{1 + 3\,e^{-2p}}{p^2 + 2p + 2}$.

1. Montrer que : $F(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2+1} + 3\dfrac{e^{-2p}}{(p+1)^2+1}$.
2. Déterminer l'original de $\dfrac{1}{(p+1)^2+1}$ (penser à sin t)
3. En déduire l'original de F(p)

Exemple 7 :
Calculer l'original de $F(p) = \dfrac{p^3 + 2p + 1}{p^2(p^2+2)}$.

1. Montrer que : $F(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2p^2} - \dfrac{1}{2(p^2+2)}$.
2. Déterminer l'original de : $\dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{1}{2p^2}$
3. Déterminer l'original de : $\dfrac{1}{2(p^2+2)}$ [on utilisera $\sin\left(\sqrt{2}t\right)$ U(t)]
4. Conclure.

Exemple 8 :
Calculer l'original de $F(p) = \dfrac{1}{4p^2 + 16p + 17} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{(p+2)^2 + \frac{1}{4}}$.