Nom: 1ère partie Classe : 5 B - C

F. Mélotte

Institut Sainte-Ursule 15 Juin 2009

CONTRÔLE DE MATHÉMATIQUE (MATH 4H)

Instructions :

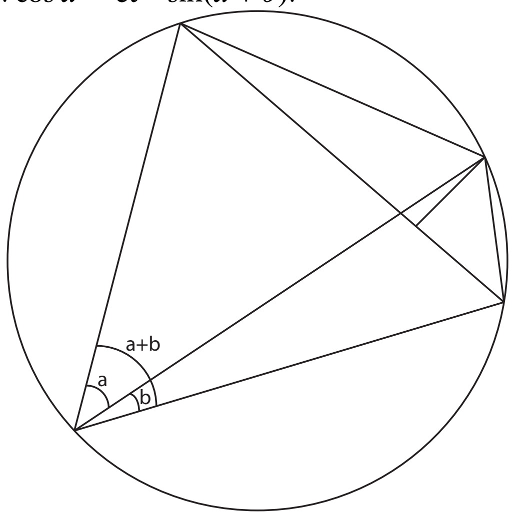
- Indiquer votre nom sur le questionnaire et remettre celui-ci avec votre travail.
- Ne pas répondre sur le questionnaire.
- Répondre aux questions dans l'ordre. T**racer une ligne entre chaque question**.
- Tout résultat doit être justifié clairement et complètement.
- La calculatrice **est autorisée**.

- Trigonométrie

(2) 1. On considère la fonction $f(x) = 2\cos(3x) + 1$.

a) Quel est le domaine de définition de f?
b) Cette fonction est-elle paire ou impaire? Justifier.
c) Rechercher les racines de cette fonction.
d) Enumérer les racines trouvées qui sont comprises entre 0 et π.

(1) 2. a) Dans le cercle ci-dessous, de diamètre 1, indiquer clairement (utilisez des couleurs) les 3 grandeurs $\sin a \,.\, \cos b$, $\sin b \,.\, \cos a$ et $\sin(a+b)$.



b) Enoncer la formule de calcul de $\sin(a+b)$.

c) Utiliser cette formule pour calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

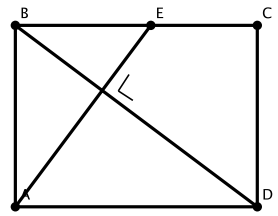
(2) 3. Calculer et justifier: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\mathrm{tg}(3x)}$

(1) 4. La fonction $\mathrm{tg}\, x$ est strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Justifier.

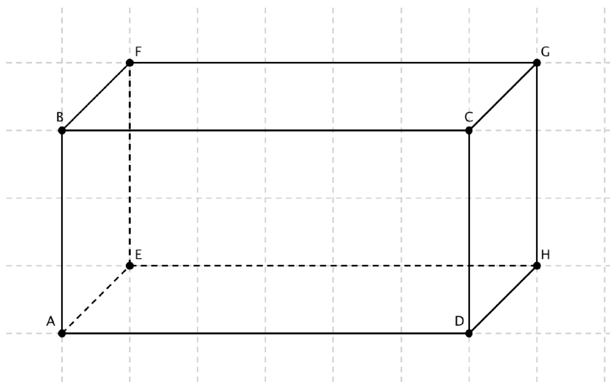
suite au verso....

■ Géométrie

(3) 5. On considère le rectangle ABCD tel que $\overline{\text{AD}} = 4$ cm et $\overline{\text{AB}} = 3$ cm.
Déterminer la position du point E sur le segment [BC] afin que les segments [AE] et [BD] soient orthogonaux.



(3) 6. Une pièce d'un bâtiment en contruction mesure $\overline{\text{AD}} = 6\ m$ sur $\overline{\text{AE}} = 3\ m$ et a une hauteur $\overline{\text{AB}}$ égale à 3 m.
Déterminer l'angle entre la verticale AB et la droite reliant les points A et G.



(2) 7. Dans l'espace muni d'une base orthonormée, on donne les points $A : (-2, 3, 0)$, $B : (0, 1, 3)$ et $C : (1, \boldsymbol{k}, 1)$

a) Calculer $\overrightarrow{a} \bullet \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right)$

b) Déterminer $\boldsymbol{k}$ pour que les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ soient orthogonaux.

BON TRAVAIL !

Solutions

Ce document ne présente que quelques éléments de solution. Pour l'examen, toutes les solutions doivent être complètes et justifiées.

- Trigonométrie

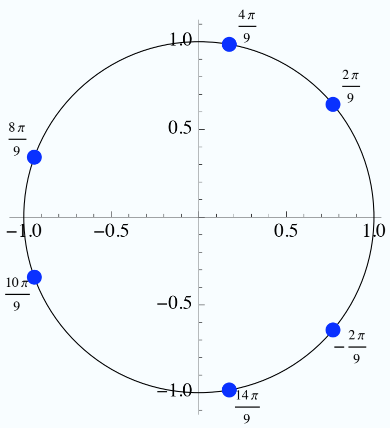
(2) 1. On considère la fonction $f(x) = 2\cos(3x) + 1$.

a) Quel est le domaine de définition de f?
b) Cette fonction est-elle paire ou impaire? Justifier.
c) Rechercher les racines de cette fonction.
d) Enumérer les racines trouvées qui sont comprises entre 0 et π.

a) Dom $f = \mathbb{R}$
b) $f(-x) = 2\cos(-3x) + 1 = 2\cos(3x) + 1 = f(x)$
fonction paire
c) Il faut résoudre l'équation $2\cos(3x) + 1 = 0$
$\cos(3x) = \frac{-1}{2}$
$\cos(3x) = \cos\left(2\frac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi k}{3} - \frac{2\pi}{9} & (1) \\ x = \frac{2\pi k}{3} + \frac{2\pi}{9} & (2) \end{cases}$$

Sur le cercle:



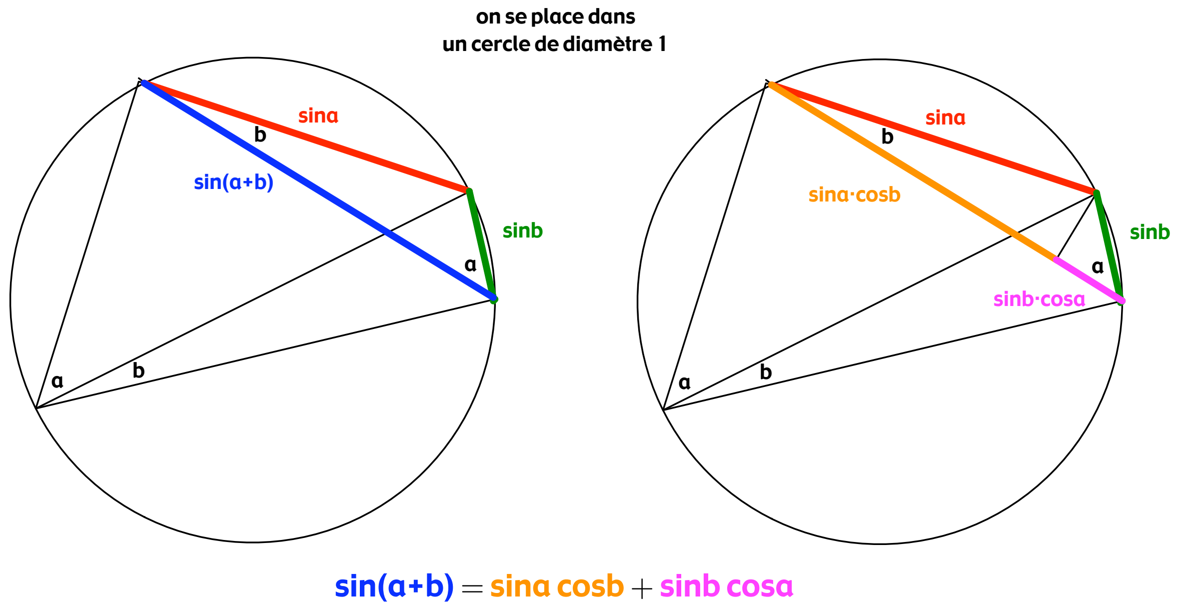
d) $\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$

(1) 2. a) Dans le cercle ci-dessous, de diamètre 1, indiquer clairement (utilisez des couleurs) les 3 grandeurs $\sin a \cdot \cos b$, $\sin b \cdot \cos a$ et $\sin(a+b)$.

b) Enoncer la formule de calcul de $\sin(a+b)$.

c) Utiliser cette formule pour calculer $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

a)



source: http://www.mathemac.com/

b) $\sin(a+b) = \sin a \,.\, \cos b \;+\; \sin b \,.\, \cos a$

c) $\sin(\frac{7\pi}{12}) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} \;+\; \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(2) 3. Calculer et justifier: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg}(3\,x)}$

Sachant que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, on a

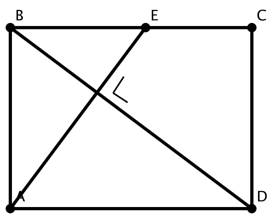
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{tg}(3\,x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(3\,x)}{\sin(3\,x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\,x\cos(3\,x)}{3\sin(3\,x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3\,x)}{3} = \frac{1}{3}$$

(1) 4. La fonction $\operatorname{tg} x$ est strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Justifier.

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ est strictement positif sur l'intervalle considéré.

- Géométrie

(3) 5. On considère le rectangle ABCD tel que $\overline{AD} = 4$ cm et $\overline{AB} = 3$ cm.
Déterminer la position du point E sur le segment [BC] afin que les segments [AE] et [BD] soient orthogonaux.



Il faut que le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$

Soit $\overline{BE} = x$ cm

1ère méthode:

$\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) \bullet \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE} \bullet \overrightarrow{BD} = -9 + 4\,x = 0$

On trouve $x = \frac{9}{4}$

2ème méthode:

On choisit comme axe des abscisses la droite AD et comme axe des ordonnées la droite AB. On a alors un repère orthonormé.

$A : (0, 0)$

$B : (0, 3)$

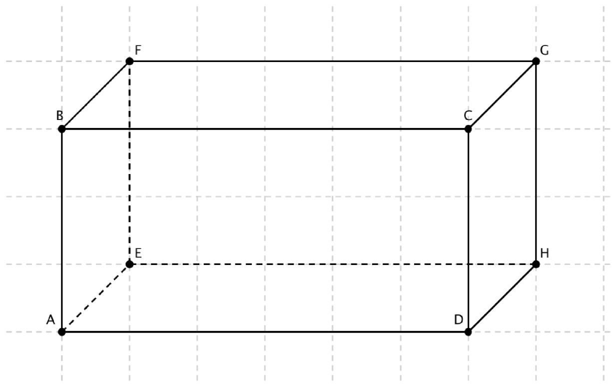
$D : (4, 0)$

$E : (x, 3)$

$\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BD} = (x, 3) \bullet (4, -3) = 4\,x - 9 = 0$

$x = \frac{9}{4}$

(3) 6. Une pièce d'un bâtiment en contruction mesure $\overline{AD} = 6\,m$ sur $\overline{AE} = 3\,m$ et a une hauteur $\overline{AB}$ égale à 3 m. Déterminer l'angle entre la verticale AB et la droite reliant les points A et G.



Soit α, l'angle recherché.

1ère méthode:

On voit de suite par projection, que $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AG} = 9$

On a aussi $||\overrightarrow{AB}|| = 3$

Il reste à calculer $||\overrightarrow{AG}||$, en utiisant Pythagore

$||\overrightarrow{AG}|| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 3^2} = 3\,\sqrt{6}$

2ème méthode:

On choisit un repère orthonormé dans l'espace tel que par exemple:

$E:(0,0,0)$
$A:(3,0,0)$
$B:(3,0,3)$
$G:(0,6,3)$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AG}} = (0,0,3) \bullet (-3,6,3) = 9$
$||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|| = 3$
$||\overrightarrow{\mathrm{AG}}|| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

Calculons le produit scalaire

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AG}} = 9\sqrt{6}\cos\alpha = 9$
et donc
$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$
ce qui donne
$\alpha = 65.9052°$

(2) 7. Dans l'espace muni d'une base orthonormée, on donne les points $A:(-2,3,0)$, $B:(0,1,3)$ et $C:(1,k,1)$

a) Calculer $\overrightarrow{a} \bullet \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right)$

b) Déterminer k pour que les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ soient orthogonaux.

a) $\overrightarrow{a} \bullet \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right) = (-2,3,0) \bullet (2,-2,3) = -4-6 = -10$
b) $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c} = -2 + 3k = 0$
$k = 2/3$