Corrigés

Corrigés

(voir table complète sujets-corrigés, page 7)

AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 (3,5 points)

1) A est la somme de l'aire du carré ABCD et de l'aire du demi-disque de diamètre [BC].
La longueur du côté du carré a pour mesure 2 , comme le diamètre du disque.

Donc $A = 4 + \frac{\pi}{2}$

2) a) Si M appartient au segment [AB], A(x) est la mesure de l'aire du triangle AMO, dont la hauteur relative au côté [AM] (de mesure x) a pour mesure 1.

Donc $A(x) = \frac{x}{2}$

b) Si M appartient au demi-cercle d'extrémités B et C, A(x) est la somme des mesures des aires du triangle AOB et du secteur de disque de diamètre [BC**]** délimité par les rayons [OB] et [OM].
L'aire du secteur de disque est proportionnelle à la longueur de l'arc;

pour un arc de longueur π (demi-cercle), l'aire est $\frac{\pi}{2}$,

donc pour un arc de longueur x-2, l'aire du secteur de disque sera $\frac{(x-2)}{2}$;

Donc $A(x) = 1 + \frac{(x-2)}{2} = \frac{x}{2}$

c) Si M appartient au segment [CD], A(x) est la somme des mesures des aires du triangle AOB, du demi-disque de diamètre [BC] et du triangle OCM.
Dans le triangle OCM, le côté [CM] a une mesure de $x - (\pi + 2)$ et la hauteur correspondante mesure 1;

D'où $A(x) = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{x - (\pi + 2)}{2} = \frac{x}{2}$

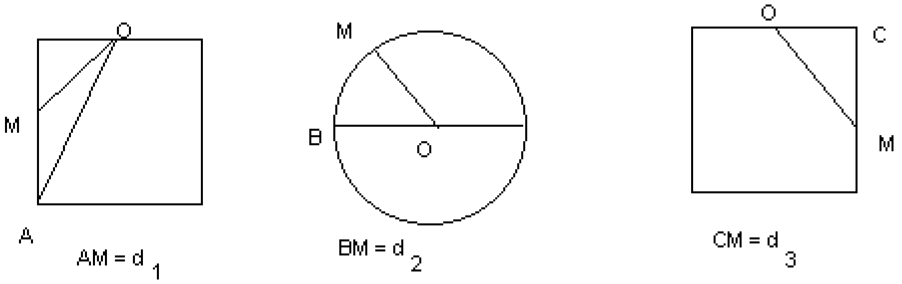
<u>*Autres méthodes*</u> *:*

- pour trouver l’aire du secteur de disque en fonction de la longueur de l’arc on peut utiliser une formule apprise par cœur si on la connaît , formule reliant l’angle au centre en radian et la longueur de l’arc intercepté par cet angle.

Si α est la mesure en radian de l'angle d'un secteur circulaire de rayon R, alors la longueur de l'arc correspondant est αR et l'aire du secteur est $\alpha \frac{R^2}{2}$;

D'où ici : $\alpha R = \alpha = x - 2$ *et* $\alpha \frac{R^2}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{x-2}{2}$

- *Il est possible aussi de décomposer le calcul dans un premier temps en trois parties indépendantes*



Aire AMO = $\frac{d_1}{2}$ *aire BMO =* $\frac{d_2}{2}$ *aire OMC =* $\frac{d_3}{2}$

En faisant la somme on trouve :

$\text{Aire} = \frac{(d_1 + d_2 + d_3)}{2} = \frac{x}{2}$ *avec selon le cas $d_2 = d_3 = 0$ ou seulement d_3=0*

3) a) On cherche x tel que $A(x) = \frac{1}{4} \cdot A$,

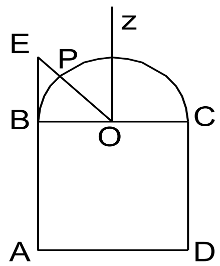
Cherchons si M est placé avant D pour pouvoir appliquer le calcul précédent.
L'aire A(x) croit avec x. Si M est en D, l'aire balayée est égale à 2 fois l'aire du triangle AOB plus celle du demi cercle ; elle est donc égale à 2 + π.
L'aire cherchée est inférieure, donc M est situé avant D. On peut utiliser le calcul $A(x) = \frac{x}{2}$. Il vient $\frac{x}{2} = 1 + \frac{\pi}{8}$, d'où $\boxed{x = 2 + \frac{\pi}{4}}$

b) Comme AB = 2, on a $x = AB + \frac{\pi}{4}$

Or $\frac{\pi}{4}$ représente le quart de la longueur du demi-cercle de rayon 1;
D'où la position de P au quart de du demi-cercle en partant de B.

Pour construire P , il faut tracer un angle BOP de 45°. On peut par exemple :

- soit tracer une perpendiculaire [Oz) en O à (BC) et tracer au compas la bissectrice de l'angle $B\hat{O}z$ qui coupe le cercle en P ;
- soit plus simplement tracer un triangle rectangle isocèle BOE en portant BE = 1 sur la demi-droite [AB) et (OE) coupe le cercle en P.



EXERCICE 2 (1,5 points)
Désignons par X, Y et Z les trois dimensions du pavé, exprimées en cm et V son volume exprimé en cm^3; on a:

$$X \times Y = 240 \qquad X \times Z = 160 \qquad Y \times Z = 96 \quad \text{et} \quad V = X \times Y \times Z$$

d'où en multipliant membre à membre les trois premières égalités, on obtient:

$$X^2 \cdot Y^2 \cdot Z^2 = 240 \times 160 \times 96$$

d'où $V^2 = 240 \times 160 \times 96$ et $\underline{V = \sqrt{240 \times 160 \times 96} = 1920\ (cm^3)}$

Autres méthodes:

1. On utilise les équations pour calculer X, Y et Z; par exemple, on peut écrire:
$\dfrac{X}{160} = \dfrac{Y}{96}$ soit $Y = X \times \dfrac{96}{160}$

d'où $X \times Y = X^2 \times \dfrac{96}{160} = 240$ soit $X^2 = 400$ donc $\underline{X = 20}$

et par suite $Y = \dfrac{240}{20} = 12$ et $Z = \dfrac{160}{20} = 8$

et le volume $V = 20 \times 12 \times 8 = 1920\ (cm^3)$.

2. une autre méthode serait $160 \times 96 = 240 \times Z^2$ d'où $Z^2 = 2^6$
Une décomposition en facteurs premiers des trois nombres 240, 160 et 96 permet de simplifier cette égalité pour obtenir immédiatement ce résultat d'où $Z = 2^3 = 8$ d'où le volume $V = 240 \times 8$.

3. En admettant que X, Y et Z sont des entiers, on peut aussi procéder ainsi : :
$X \times Y = 240 = 2^4 \times 3 \times 5$ $\quad X \times Z = 160 = 2^5 \times 5$ $\quad Y \times Z = 96 = 2^5 \times 3$
Z est un diviseur commun à $X \times Z$ et $Y \times Z$, il est égal à 2^n avec $n \leq 5$
X est égal à $2^p \times 5$ avec $p \leq 4$ et Y est égal à $2^q \times 3$ avec $q \leq 4$
Après essais, il vient : $X = 2^2 \times 5$ $\quad Y = 2^2 \times 3$ et $Z = 2^3$
Le volume en cm^3 est donc $2^7 \times 3 \times 5$.

EXERCICE 3 (1,5 Points)

Appelons x la longueur du premier tronçon (la montée à l'aller); $\dfrac{x}{2}$ est la longueur du deuxième tronçon (la descente à l'aller).

1) La durée du parcours aller est donc: $T_{aller} = \dfrac{x}{20} + \dfrac{\frac{x}{2}}{40} = \dfrac{5}{80} \cdot x$

et la vitesse moyenne sur le parcours aller est:

$$V_1 = \frac{x + \frac{x}{2}}{\frac{5}{80} \cdot x} = \frac{\frac{3x}{2}}{\frac{5x}{80}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{80}{5} = 24 \quad \text{donc } V_1 = 24 km/h$$

2) La durée du parcours retour est: $T_{retour} = \frac{\frac{x}{2}}{20} + \frac{x}{40} = \frac{x}{20}$

et la vitesse moyenne sur le parcours retour est:

$$V_2 = \frac{x + \frac{x}{2}}{\frac{x}{20}} = \frac{\frac{3x}{2}}{\frac{x}{20}} = \frac{3}{2} \cdot 20 = 30 \qquad \text{donc } V_2 = 30\text{km/h}$$

3) La durée du parcours aller-retour est: $T_{aller} + T_{retour} = \frac{5}{80} \cdot x + \frac{x}{20} = \frac{9}{80} \cdot x$

et la vitesse moyenne sur le parcours aller-retour est:

$$V_3 = \frac{3x}{\frac{9x}{80}} = 3 \times \frac{80}{9} = \frac{80}{3} \qquad \text{donc } V_3 \approx 26{,}67\text{km/h}$$

<u>Autre méthode :</u>
A l'aller, la descente est deux fois plus courte que la montée et la vitesse de descente est le double de celle de la montée; le temps de la descente sera donc égal au quart du temps de montée et le temps total sera 5 fois le temps de la descente pour une distance 3 fois plus grande; d'où:

$$V_1 = \frac{3d}{5t} = \frac{3}{5} \cdot V_{descente} = \frac{3}{5} \times 40 = 24\text{km/h}$$

Au retour, la descente est deux plus longue que la montée, mais à une vitesse double; les temps de montée et de descente sont donc égaux; d'où:

$$V_2 = \frac{3d}{2t} = \frac{3}{2} \cdot V_{montée} = \frac{3}{2} \times 20 = 30\text{km/h}$$

EXERCICE 4 (1,5 Points)

Soit $a = \overline{mcdu}$ l'écriture décimale du nombre recherché: m, c, d et u désignent respectivement les chiffres des milliers, des centaines, des dizaines et des unités du nombre a.

$a \geq 7000$ donc $7 \leq m \leq 9$

m = 2c donc m = 8 et c = 4

a est multiple de 45, donc multiple de 9 et de 5; comme a est impair, on a obligatoirement : u = 5

Le seul nombre de la forme $\overline{84d5}$ qui soit multiple de 9 est 8415 (on reconnaît un nombre multiple de 9 au fait que la somme de ces chiffres est elle-même un multiple de 9). <u>Le nombre recherché est donc 8415.</u>

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Solution du problème proposé aux enfants:

	Aubin 800	Elias 78	Durand 60	Créon 254	Béal 430	Fustier 305
Boîtes	8	0	0	2	4	3
Etuis	0	8	6	6	3	1

1) Dans ce problème, la compétence en termes de connaissance des nombres concerne la signification des chiffres dans l'écriture en base 10 d'un nombre inférieur à 1000.
Les élèves doivent comprendre et utiliser la valeur positionnelle des chiffres pour résoudre un problème de partage en centaines et en dizaines (ils peuvent extraire directement l'information contenue dans l'écriture du nombre ou retrouver cette information par comptage ou calcul).
cdu : c pour les centaines donc c boîtes et d pour les dizaines donc d ou d+1 étuis selon que u= 0 ou non

2) Classement des productions en fonction des procédures:
Catégorie n°1: **Les élèves qui utilisent une schématisation: Benoît et Mickaël.**

Ces deux élèves utilisent une représentation figurative liée au matériel de numération; ils représentent ainsi une décomposition canonique additive (suivant les puissances de dix) des nombres:

| représente 1; □ représente 10 et □ représente 100.

On peut penser que ces décompositions ont été obtenues par comptage sur les puissances de 10.

Catégorie n°2: **Les élèves qui utilisent des décompositions additives ou "hybrides"** (faisant intervenir l'addition et la multiplication) **suivant les puissances de 10.**

Ces décompositions peuvent être obtenues à partir de la valeur positionnelle des chiffres; mais nous faisons ici l'hypothèse que les élèves de cette catégorie ont retrouvé ces décompositions par calcul ou comptage de 100 en 100, puis de 10 en 10 avec ajout final des unités quand elles existent.

On peut distinguer deux sous-catégories:

- Isabelle, Elise et Charles qui produisent des décompositions additives des nombres (additions réitérées de 100 puis de 10);
- Claire qui produit une décomposition hybride faisant intervenir l'addition et la multiplication.

Catégorie n°3: **Les élèves qui utilisent directement la valeur positionnelle des chiffres: Alice, Alain et Odile.**

On peut éventuellement distinguer Odile d'Alain et d'Alice qui explicitent la décomposition en centaines , dizaines et unités.

Remarques importantes :

1) Benoît ne pense pas à commander un étui supplémentaire pour les unités: il ne

prend pas en compte toutes les contraintes de la situation.
2) Elise n'obtient la décomposition que pour les nombres multiples de 10.
3) Charles trouve deux décompositions par un calcul en colonnes (addition posée) dans les deux cas les plus simples (800 et 60), c'est à dire sans unités et avec un seul chiffre non nul. Il résout sans doute mentalement et de façon correcte le problème pour 430.
   On peut aussi faire l'hypothèse que les calculs de Charles sont des vérifications de résultats obtenus mentalement à partir de la signification des chiffres; dans ce cas, la production de Charles relèverait de la catégorie n°3.
4) Claire écrit des égalités incorrectes comme $2\times100=200+5\times10=250+4$
   Celles-ci montrent cependant comment elle cumule les centaines, puis les dizaines et enfin les unités pour atteindre chaque nombre.
5) Alain écrit directement la décomposition du type x**c** y**d** z**u**, tandis qu'Alice s'aide d'un tableau de numération.
6) Odile n'explicite pas sa procédure; on peut supposer qu'elle a extrait directement les informations de l'écriture chiffrée sans utiliser la moindre décomposition. Elle traduit immédiatement en termes de boîtes et d'étuis les chiffres des centaines et des dizaines (on peut regretter l'absence de justifications et d'explications relatives à la technique utilisée).

<u>Remarques de détail:</u>
- Benoît ne traite pas le cas de 305, peut-être par manque de temps.
- Mickaël résout correctement l'exercice mais il ne transforme pas "7 étuis et 1 étui" en 8 étuis (on retrouve ce type d'oubli chez Alain et Claire).
- Elise réussit dans deux cas (800 et 60);mais pour 430, sa décomposition est exacte (avec une égalité incorrecte) avec une conclusion fausse (4 boîtes 6 étuis).
- Claire écrit 7×100 à la place de 7×10.
- On peut relever chez Odile l'égalité incorrecte: "305 = 3 boîtes et 1 étui".

3) <u>Rangement des productions de la plus élémentaire à la plus experte:</u>
Pour effectuer ce rangement on peut prendre pour critères **le degré d'abstraction** (de conceptualisation) et **le principe d'économie** (écritures plus courtes, gain de temps,…):
- Mickaël: schématisation par juxtaposition de symboles qui évoquent le matériel de numération.
- Isabelle: les symboles sont remplacés par les écritures chiffrées 100 et 10; le signe + remplace la juxtaposition;
- Claire: les sommes réitérées sont remplacées par des écritures multiplicatives (écritures plus économiques).
- Alice: elle explicite la valeur positionnelle des chiffres dans un tableau; il n'y a plus comptage ou calcul pour trouver la décomposition.
- Alain: il procède de la même façon mais sans tableau.
- Odile: elle conclut sans s'aider d'écritures du type c/d/u.

Il faut relativiser le jugement porté ci-dessus sur le caractère plus ou moins expert des productions:
- *la schématisation utilisée par Mickaël est très élaborée et il est difficile de se prononcer quant à l'économie entre les productions de Mickaël et Isabelle.*
- *les procédures d'Alain, Alice et Odile sont assez voisines; elles ne diffèrent que par les explications et justifications apportées à la technique mise en œuvre.*

- *les deux groupes à distinguer en vue d'une exploitation pédagogique de cette analyse sont le groupe de Mickaël, Isabelle et Claire et celui d'Alain, Alice et Odile: ces derniers extraient l'information contenue dans l'écriture des nombres; les autres la retrouvent par comptage et/ou calcul.*

Des réponses qui seraient :

1- Mickaël 2- Isabelle 3- Claire 4- Odile 5- Alain 6- Alice	1-Mickaël 2-Isabelle 3-Claire 4-Odile, Alain, Alice sur le même plan

sont tout à fait acceptables. En effet Alice utilise un savoir institutionnel, le tableau, qu'elle maîtrise très bien, ce qui lui permet en même temps de justifier sa réponse mais on ne sait pas ce qu'elle a compris. Ce tableau fonctionne peut-être pour elle comme un automatisme. Alain passe par la décomposition en centaines, dizaines, unités, pour justifier sa réponse. Odile omet toute justification de son résultat, ce qu'on peut interpréter comme une maîtrise parfaite du savoir (justification jugée implicitement inutile) ou bien par une maîtrise technique (ou en acte) de la numération mais avec une certaine difficulté pour formuler correctement la justification de la réponse en utilisant le signe « = » . Par exemple une écriture comme « Béal = 430 = 4 boîtes et 3 étuis » évidemment acceptée CE2, sera déclarée un jour ou l'autre illégitime (en 6ème).

SECOND VOLET (8 POINTS)

<u>Questions sur le document A:</u>

1) a) Les propriétés mathématiques qui peuvent être mises en jeu par les élèves pour résoudre le problème des calendriers, l'exercice n°1 et l'exercice n°2, sont **les deux propriétés de linéarité des fonctions linéaires** attachées à ces situations de proportionnalité:

- la propriété de **linéarité multiplicative**: f(k.x) = k.f(x)

Pour le problème des calendriers, les élèves mettent en jeu cette propriété lorsqu'ils calculent le prix de 60 calendriers en multipliant par 4 le prix de 15 calendriers:

$$f(60) = f(4 \times 15) = 4 \times f(15)$$

- la propriété de **linéarité additive**: f(x+y) = f(x) + f(y)

Pour l'exercice n°1 par exemple, les élèves mettent en jeu cette propriété lorsqu'ils calculent la distance parcourue en 16 minutes en additionnant les distances respectivement parcourues en 6 et 10 minutes:

$$f(16) = f(6) + f(10)$$

On peut remarquer que, pour le problème des calendriers , comme pour l'exercice n°2, la propriété de linéarité multiplicative suffit: dans le premier cas, tous les nombres de calendriers sont des multiples de 15; dans le second, tous les nombres de petits pains sont multiples de 5.
Dans ces deux cas, les élèves peuvent aussi effectuer un passage par l'unité, c'est à dire utiliser la propriété de linéarité multiplicative pour trouver le prix d'un calendrier ou d'un petit pain ($f(1) = f\left(\frac{15}{15}\right) = \frac{f(15)}{15} = 20$ *pour les calendriers ou* $f(1) = f\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{f(5)}{5} = 3$ *pour les petits pains). Ensuite ils peuvent utiliser de nouveau cette propriété pour calculer le prix de x calendriers ou de x petits pains:* $f(x \cdot 1) = x \cdot f(1)$*; mais ils peuvent aussi utiliser implicitement la **relation fonctionnelle définissant la fonction linéaire associée à la situation**:* $f(x) = 20 \cdot x \ldots \text{ou} \ldots f(x) = 3 \cdot x$ *selon le cas; ils obtiennent le prix de x objets en multipliant le nombre d'objets par le prix unitaire.*

b) Les difficultés rencontrées par les élèves dans les exercices n°1 et n°2 :
Pour l'exercice n°1 :

- cet exercice fait appel à la notion de vitesse uniforme qui est à peine abordée au cycle III;
- la question et l'énoncé ne présentent pas les grandeurs dans le même ordre (durée puis distance dans l'énoncé, distance puis durée dans les questions);
- le passage par l'unité n'est guère envisageable au CM1, car il oblige les élèves à manipuler des décimaux non entiers ($15 \div 10 = 9 \div 6 = 1{,}5$);
- de plus, ce nombre représente la distance parcourue en 1 minute et

s'interprète plus difficilement qu'un prix unitaire; l'utilisation par les élèves de la relation fonctionnelle $f(x) = 1,5 \cdot x$ n'est donc guère envisageable;

- deux couples de nombres sont donnés, alors que dans le premier problème un seul couple était fixé ;
- dans la question 1), la seule procédure envisageable est donc l'utilisation de la propriété de linéarité additive; or jusqu'ici, les élèves ont pu résoudre tous les exercices proposés en utilisant seulement la propriété de linéarité multiplicative.

L'exercice n°2, lui, ne présente aucune difficulté particulière: 15 et 20 sont des multiples de 5 et la "table de cinq" est bien connue des élèves au CM; le passage par l'unité a du sens et les calculs sont simples. Il est cependant possible que l'utilisation à deux reprises du nombre 15 (15F puis 15 petits pains) provoque une confusion chez certains élèves.

c) Les différentes démarches utilisées par les élèves pour résoudre le problème des calendriers proposé dans l'étape 1 ont été , au cours de l'étape 2, "analysées, validées ou non, comparées pour leur efficacité". Cette étape 2 a donc du faire émerger les propriétés de la proportionnalité que les élèves vont pouvoir réinvestir dans l'exercice n°2 ; en effet celui-ci présente un contexte analogue à celui du problème des calendriers (situation du type : nombre d'objets / prix), avec des relations multiplicatives simples.

2) La consigne de l'exercice n°3:
La consigne proposée n'est pas claire car elle parle de "deux recettes" alors qu'il s'agit de la même recette (même mousse au chocolat) ; afin de la rendre compréhensible par les élèves sans explications supplémentaires, on pourrait la reformuler ainsi:
"Voici la **même recette** de mousse au chocolat pour des nombres de personnes différents. Retrouve les quantités manquantes."
Ou bien :
« Voici une recette incomplète pour faire de la mousse au chocolat pour 4 personnes. Il manque le nombre de cuillères d'eau. Papa veut utiliser cette recette. Il sait qu'en mettant 8 œufs il faut mettre 4 cuillères d'eau. Retrouve les nombres manquants. »
Avant toute consigne, il serait raisonnable de s'assurer que les enfants comprennent cette notion de recette. En amont, une séance cuisine où il faudrait effectivement réaliser une recette simple donnée pour un nombre de personnes double serait bienvenue (exemple : des crêpes).

3) Les tableaux proposés aux élèves dans les exercices n°4 et n°5 n'ont pas apporté l'aide escomptée car:

- Les tableaux dans l'étape 2 ont été présentés uniquement pour organiser les données et les résultats déjà connus, le tableau constituant alors une présentation synthétique de l'exercice résolu. Ces tableaux n'ont jamais été utilisés pour résoudre les exercices, ni pour expliciter, de façon contextualisée, les raisonnements mis en œuvre. Or dans l'étape 3, le tableau est donné et se substitue à la situation.
- La donnée d'un tableau sans opérateur comme outil de résolution de problèmes n'est pas pertinente à ce stade car elle induit des procédures mécaniques de recherche de relations entre les nombres et occulte la reconnaissance la situation

multiplicative.

- De plus, le choix des nombres proposés peut induire des démarches erronées par recherche de régularité; les élèves assimilent, à tort, proportionnalité à régularité. Par exemple, pour l'exercice n°4, après un doublage pertinent pour passer de la case 1 à la case 2, il comptent de 5 en 5 (le passage de 15 à 30 dans le second tableau s'explique sans doute par l'absence de la case 4). Dans l'exercice n°5, le premier tableau après le doublage se poursuit par un comptage de 6 en 6; le début du deuxième tableau est construit suivant un algorithme de doublage de case en case, puis l'enfant se perd sans doute dans ses calculs.

<u>Questions sur les documents A et B:</u>

4) Procédures pour trouver le prix de 250g de fromage sachant que le prix de 100g est 8F:

(a) Recherche du coefficient de proportionnalité:

$a = \frac{8}{100} = 0{,}08$ d'où le prix des 250g: $a \times 250 = 20$

(b) Utilisation de la propriété de linéarité multiplicative:

$250 = 2{,}5 \times 100$ d'où le prix des 250g: $2{,}5 \times 8 = 20$

$250 = \frac{1000}{4} = \frac{10 \times 100}{4}$ d'où le prix des 250g: $\frac{8 \times 10}{4} = 20$

$250 = 2{,}5 \times 100 = 5 \times 50$ d'où le prix de 250g $2{,}5 \times 8 = 5 \times 4 = 20$

(c) Utilisation des propriétés de linéarité additive et multiplicative:

$250 = 100 + 100 + 100 \div 2$

d'où le prix des 250g : $8 + 8 + 8 \div 2 = 8 + 8 + 4 = 20$

(d) En s'appuyant sur d'autres réponses obtenues précédemment : (utilisation implicite de la propriété de linéarité additive)

$250 = 300 - 50$ d'où le prix des 250g : $24 - 4 = 20$

(e) Le passage par l'unité :

Prix d'un gramme : $8 \div 100 = 0{,}08$F   d'où le prix des 250g : $0{,}08 \times 250 = 20$

(f) Egalité des rapports :

$\frac{8}{100} = \frac{X}{250}$ donc $X = \frac{8}{100} \times 250 = 20$

5) Les nombres 104 et 12 d'une part, 150 et 58 d'autre part ont été choisis par les auteurs pour mettre en évidence une erreur assez fréquente chez les élèves:

<u>l'utilisation d'un modèle additif</u> (utilisation erronée de la conservation des écarts).

En effet, les élèves, ne voyant pas de relations multiplicatives simples entre les données, utilisent souvent des relations additives qui traduisent des raisonnements erronés du type:

"le poids a augmenté de 4g (respectivement de 50g) donc le prix a augmenté de 4F (respectivement de 50F)"

que l'on peut aussi formuler ainsi:

ils utilisent la règle additive erronée : $f(x + a) = f(x) + a$ à la place de la propriété de linéarité multiplicative $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$

Le choix de ces nombres a un autre intérêt. Ils peuvent faire émerger des contradictions dans les résultats obtenus, de sorte que les élèves soient amenés lors d'un débat à corriger leurs erreurs pour résoudre ces contradictions.
Si certains choisissent 58F pour le prix de 150g, d'autres vont se rendre compte que ce prix est supérieur au prix pour 300g.
Si certains associent 12F et 104 g (probable, vu la difficulté que pose le choix de 104g) d'autres élèves, voire les mêmes, vont associer 12F et 150g (résultat exact et assez facile à trouver). Les deux réponses ne peuvent être justes simultanément. Il faudra trouver l'erreur

6) Justification de la réponse exacte dans le cas de 104g :
Dans un premier temps, le maître peut faire chercher un résultat approché: 104g est légèrement supérieur à 100g, donc le prix est légèrement supérieur à 8F.
<u>La recherche de la valeur exacte peut alors se faire avec l'aide soutenue de l'enseignant:</u> celui-ci peut suggérer aux élèves de trouver le prix de 4g en **cherchant une relation multiplicative entre 4 et 100**, de façon à en déduire que 4g coûtent "25 fois moins" que 100g (utilisation de la propriété de linéarité multiplicative). Comme la séquence se situe dans un CM1, l'enseignant **évitera le recours aux décimaux en faisant exprimer les prix en centimes**; le prix en centimes des 4g de fromage sera alors donné par la division de 800 par 25, soit 32 centimes pour 4g. L'utilisation implicite de la propriété de linéarité additive donne alors le prix des 104g: 8F32cts.
Autres justifications possibles:

- Avec la même démarche que ci-dessus, trouver le prix en centimes d'un gramme de fromage et en déduire le prix des 104g en multipliant par 104.
- On peut envisager de travailler en francs, mais de confier les calculs à une calculette.
- Une fois que les élèves ont reconnu qu'il fallait calculer le prix de 4g, l'enseignant peut donner ce prix et le faire vérifier : en le multipliant par 25, on retrouve bien le prix des 100g.
- On peut aussi utiliser la propriété de linéarité multiplicative en utilisant le prix de 10400g comme intermédiaire:
  $10400 = 104 \times 100 \ldots \text{coûtent} \ldots 104 \times 8 = 832F$
  et 104 coûteront 100 fois moins, soit 832 centimes.

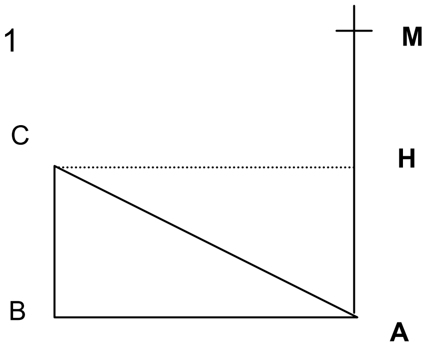
7) Suggestions de modifications de la deuxième séance du document A :
Il faudrait supprimer l'utilisation des tableaux dans la présentation des données des exercices n°4 et n°5; il est préférable de fournir celles-ci en vrac, dans le désordre, pour éviter les automatismes.
On peut alors utiliser la mise en commun pour faire expliciter verbalement les différents raisonnements utilisés de façon contextualisée, élaborer avec les élèves une présentation collective de tous les résultats sous forme d'un tableau et leur demander de mettre en évidence, sur le tableau, les calculs intermédiaires et les raisonnements utilisés en s'appuyant sur le contexte de la situation.
On peut aussi envisager, avec le support des tableaux, de faire rechercher d'autres procédures, d'autres raisonnements.
On sera aussi attentif au choix des données numériques, en proposant des couples de nombres susceptibles de faire émerger des erreurs significatives (voir question 5), exploitables en classe de façon constructives.

AMIENS

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1



1- Calcul de la distance AC
Le triangle ABC étant rectangle en B, on calcule AC par le théorème de Pythagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 2^2 = 20$. Donc AC = $2\sqrt{5}$ (cm)

2- Détermination de m pour des conditions d'aire
L'aire S1 du triangle ACM est (par exemple) $\frac{AM \times CH}{2}$ (où H désigne le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ACM). Or, ABCH est un rectangle (trois angles droits) donc CH = AB, par suite, S1 = $\frac{4 \times m}{2}$ = $2m$ (cm^2).

De même, l'aire S_2 du triangle ABC est $\frac{AB \times BC}{2}$, soit $\frac{4 \times 2}{2}$ = 4 (cm^2)
On obtient alors $S_1 = 3S_2$ pour $2m = 12$ soit $m = 6$ (cm).

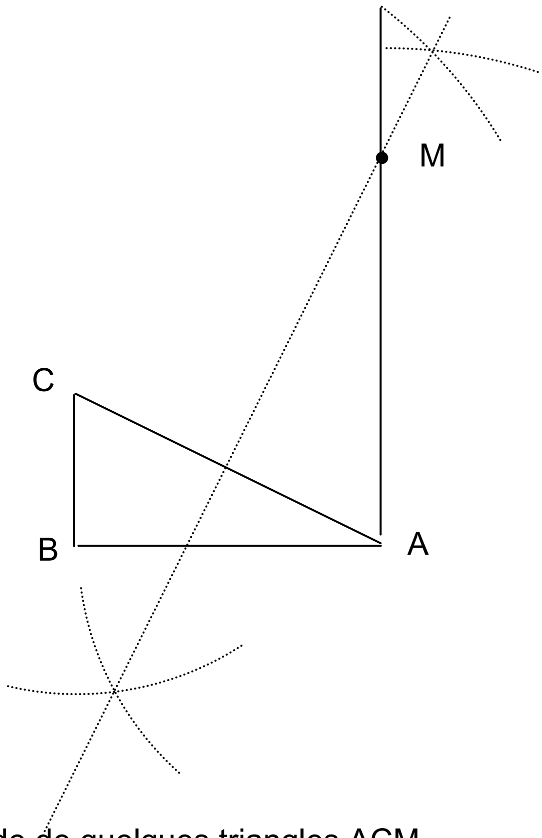
3- Détermination liée à des conditions d'isocélité

a) Le triangle ACM sera isocèle en A si et seulement si AC = AM , donc pour $m = 2\sqrt{5}$ cm

b) Le triangle ACM sera isocèle en C si et seulement si la droite (CH) est la médiatrice du segment [AM] soit AH = $\frac{AM}{2} = \frac{m}{2}$. Or, AH = BC = 2 (ABCH est un rectangle, déjà vu), donc AM = 4 soit m = 4 (en cm).

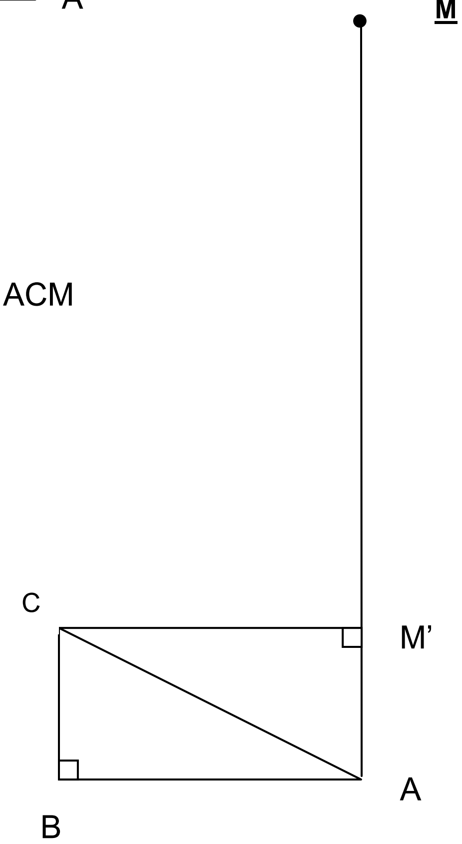
c) Le triangle ACM sera isocèle en M si et seulement si M appartient à la médiatrice du segment [AC]. M doit donc être à l'intersection de cette médiatrice et de la demi-droite [Ax). Cette intersection existe puisque les droites (BC) et (AM) sont parallèles et que la médiatrice de [AC] ne peut pas être parallèle à (BC).

Donc il existe bien un point M tel que le triangle AMC soit isocèle en M (et il est unique).
Pour la construction, il faut donc construire la médiatrice de [AC] en déterminant, à l'aide du compas, deux points équidistants de A et de C.



4- Etude de quelques triangles ACM

a)



Les droites (BC) et (AM') sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à la droite (AB). Comme de plus BC = AM' , alors le quadrilatère non croisé ABCM' possède deux côtés opposés parallèles et isométriques donc ABCM' est un parallélogramme. Ce parallélogramme possède un angle droit en B , donc c'est un rectangle.
Par conséquent le triangle ACM' est rectangle en M'.

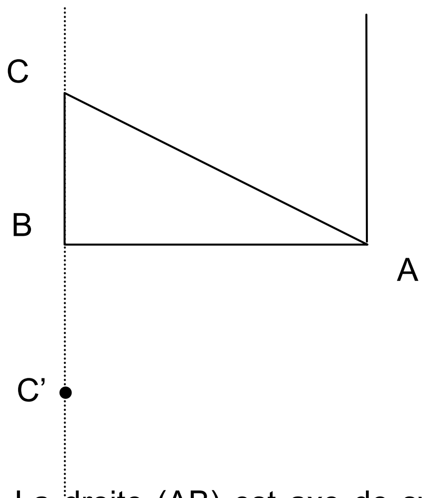
b) 1- Voir ci-dessus

2- Le triangle CMM' est rectangle en M'.

On calcule CM par le théorème de Pythagore. : $CM^2 = CM'^2 + MM'^2$. Or CM' = AB (ABCM' rectangle) et MM' = AM – AM', soit CM' = 4 et MM' = 10 – 2 = 8.
Donc $CM^2 = 4^2 + 8^2 = 16 + 64 = 80$ soit $CM = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ (cm).

3- Dans le triangle ACM, calculons le carré de chaque côté :
$AC^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$ $AM^2 = 10^2 = 100$ $CM^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$.
Or 20 + 80 = 100 , soit $AM^2 = CM^2 + AC^2$. On en déduit, en raison de la réciproque du théorème de Pythagore, que le triangle ACM est rectangle en C.

5-



a) La droite (AB) est axe de symétrie pour le triangle ACC' donc AC = AC' soit $AC' = 2\sqrt{5}$. D'autre part, B est milieu de [CC'] , donc CC' = 2 BC, soit CC' = 4 .
Un triangle équilatéral a ses trois côtés de même longueur.
Comme AC'≠ CC', le triangle ACC' n'est pas équilatéral.

b) Le triangle ACC' étant isocèle (ayant (AB) comme axe de symétrie) et non équilatéral, l'angle $\widehat{BAC}$ ne mesure pas 30° , et donc l'angle $\widehat{CAM}$ ne mesure pas 60, quelque soit le point M sur [Ax).
Un triangle équilatéral a ses trois angles de mesure 60° donc il n'existe pas de point M tel que le triangle ACM soit équilatéral.

EXERCICE 2

1-

	Location du camping	Location de la plage
12 jours	$80 + 12 \times 20$ soit 320 F	12×25 soit 300 F
20 jours	$80 + 20 \times 20$ soit 480 F	20×25 soit 500 F

Pour 12 jours, la location la plus intéressante est à la plage, pour 20 jours, la plus intéressante est au camping.

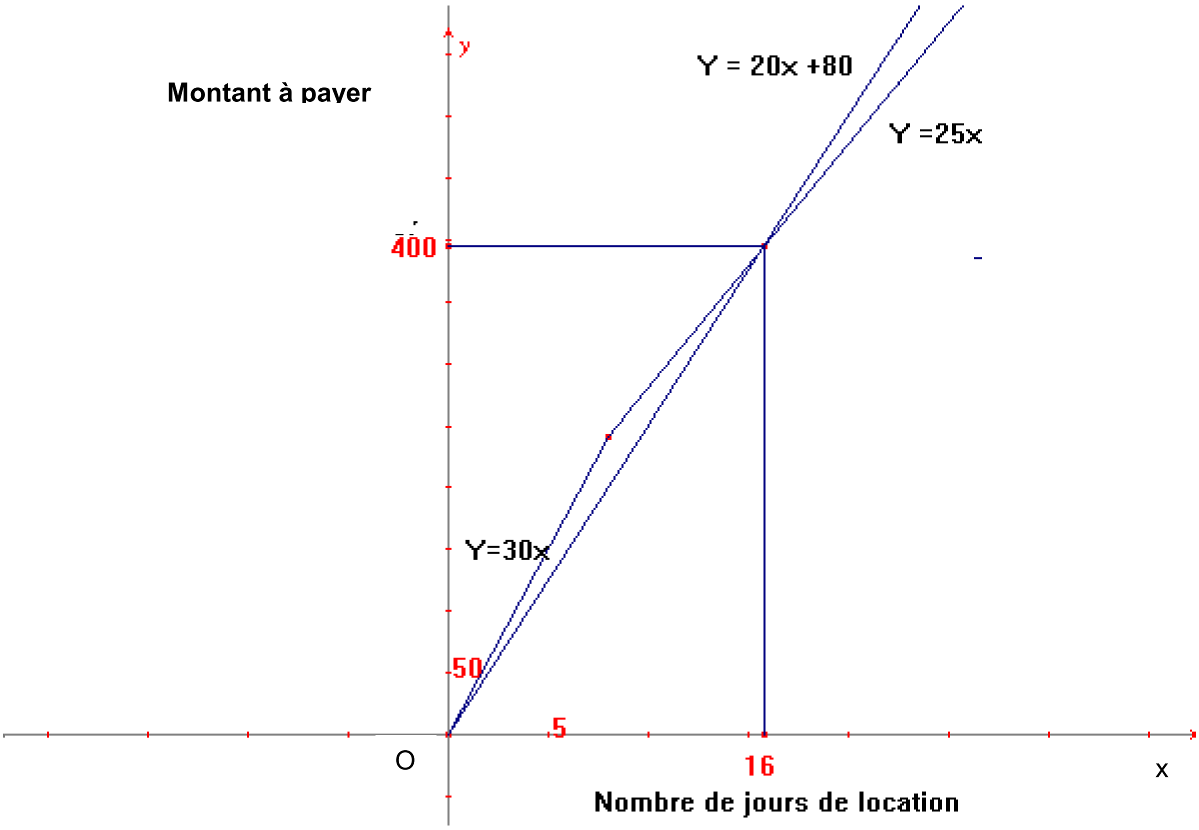
2- Soit x le nombre de jours communs de location (x est un entier naturel non nul puisque l'on suppose qu'ils ont réellement loué un vélo).
Montant (en francs) de la location en fonction de x :

		Location du camping	Location de la plage
1^er cas	$x < 8$	$30\,x$	$25\,x$
2^ème cas	$x \geq 8$	$80 + 20\,x$	$25\,x$

Dans le 1^er cas, on devrait avoir $30\,x = 25\,x$ ce qui est impossible puisque x est non nul.

Dans le 2ème cas, on doit avoir $80 + 20\,x = 25\,x$ soit $5\,x = 80$ d'où $x = 16$.
La durée correspondant à un même montant de location est de 16 jours.

3- **a)**Sur le graphique on trace deux représentations:
• une correspondant à la location du camping **$y = 30\,x$** pour $x < 8$ et **$y = 80 + 20\,x$** pour $x \geq 8$
• une correspondant à la location de la plage **$y = 25\,x$.**
On obtient donc le graphique suivant



b) Un même montant de location est obtenu à l'intersection des deux représentations graphiques, c'est à dire au point B (16 ;400) : soit une durée de location de 16 jours, pour un montant de 400 francs.

c) Graphiquement, on peut affirmer que :
Pour une durée de location inférieure strictement à 16 jours, la location à la plage est la plus intéressante.
Pour une durée de location de 16 jours, les deux locations sont équivalentes.
Pour une durée de location supérieure strictement à 16 jours, la location du camping est la plus intéressante.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1- Compétences:
Si l'on se réfère aux programmes de 1995, les compétences visées dans cette activité, sont :
• Utiliser à bon escient le vocabulaire précis donné par les programmes.
• Utiliser des outils usuels (ici, règle graduée, compas, équerre) pour construire une figure plane (simple).
• Appliquer quelques techniques usuelles de tracé (ici, tracé de perpendiculaires).

2-a) Connaissances géométriques
Les élèves doivent avoir des connaissances sur le triangle rectangle et sur le demi-cercle. Ces connaissances doivent porter sur le vocabulaire, ainsi que sur les propriétés liées à ces figures. Par ailleurs, ils doivent maîtriser la notion de longueur, et savoir aussi utiliser les outils de construction pertinents.
b) Instruments

règle non graduée	tracé des côtés du triangle
équerre	construction de l'angle droit
compas	obtention de côtés de même longueur construction du demi-cercle
règle graduée	obtention de côtés de même longueur

Remarque : En observant les productions d'élèves, on s'aperçoit qu'ils utilisent systématiquement le milieu du « grand côté » du triangle même si cela n'apparaît pas dans la consigne. Si on prend en compte cet élément dans la construction, on peut ajouter que ce milieu peut être trouvé soit avec la règle graduée, soit avec l'équerre car les triangles sont isocèles, soit avec le compas en traçant la médiatrice du « grand côté », mais cette notion n'est pas au programme du cycle 3.

3- La consigne est ambiguë : quel sens donner à l'expression « ***sur*** le grand côté ». Par ailleurs, rien n'est précisé quant au centre du demi cercle, ni son rayon, ni dans quel demi-plan il doit se situer.
De ce fait, on peut considérer que les productions B et D (aux imprécisions de l'angle droit près) répondent à la consigne du maître.
Dans la production C, un rectangle remplace le triangle attendu et dans la production A, le triangle n'a pas d'angle droit. Ces productions ne sauraient donc convenir.

4- Rédaction d'un énoncé :
« Trace un triangle : il doit être rectangle et avoir deux côtés de même longueur. Trace un demi-cercle passant par les 3 sommets de ce triangle ; son centre est le milieu du grand côté du triangle. »

SECOND VOLET (8 POINTS)

1- Etude de la division euclidienne

a) Définition

On appelle division euclidienne dans $\mathbb{N}$, la correspondance qui à un couple (a ; b) d'entiers ($b \neq 0$), fait correspondre l'unique couple (q ; r) d'entiers défini par l'égalité $a = b \times q + r$ et l'inégalité $r < b$ (On démontre effectivement l'existence et l'unicité d'un tel couple).

Avec les notations ci-dessus, le nombre a est appelé dividende, le nombre b, diviseur. Les nombres q et r sont respectivement appelés quotient et reste. Lorsque $r = 0$, on dit que la division « tombe juste », et souvent, par abus de langage, et d'une manière erronée, qu'il n'y a pas de reste.

b) Lien avec les calculettes

Ce résultat est la troncature à 6 chiffres de l'écriture décimale illimitée du nombre rationnel $\frac{497}{37}$ (sur certaines calculettes, c'est une valeur approchée, ce qui, dans le cas qui nous préoccupe, ne change rien). Cette troncature donne à penser que l'écriture décimale illimitée est périodique, et que cette période est 432. Cela correspond à une propriété générale des nombres rationnels.

Le quotient euclidien de la division de 497 par 37 est 13 : c'est la partie entière de la troncature. Pour obtenir le reste, il suffit de calculer : $497 - 37 \times 13$, ce qui nous donne 16. C'est ce calcul que l'on effectuerait avec une calculette standard.

c) Calculettes « spéciales »

• Pour 45 $\vdash$ 8, il va s'afficher 5 et 5, car le quotient est 5, et le reste est aussi 5 (On a bien $45 = 8 \times 5 + 5$ et $5 < 8$). De même, pour 54 $\vdash$ 9, il va s'afficher 6 et 0, car le quotient est 6 et le reste est nul (Clairement, $54 = 9 \times 6 + 0$ et $0 < 9$).

• Le titre de l'étape 2 se justifie par les procédures que les élèves peuvent employer. En effet, dans l'étape 1, il s'agissait de trouver le quotient et le reste ; par contre, dans cette étape 2, il faut simplement vérifier, et pour cela, le plus simple est de tester l'égalité (procédure moins coûteuse que d'effectuer la recherche). On voit ainsi immédiatement que 40 et 14 ne conviennent pas (résultat 694).

De même 85 et 4 (résultat 1449). Le calcul n'est d'ailleurs pas indispensable, car l'ordre de grandeur ne convient manifestement pas.

Pour 48 et 38, l'inégalité $38 < 17$ n'est pas vérifiée.

Enfin, il ne reste que 50 et 4 ; l'égalité $50 \times 17 + 4 = 854$ est vraie ainsi que l'inégalité $4 < 7$.

2- Influence des valeurs numériques

Les valeurs numériques influent sur le choix des procédures, en effet :

- Pour l'exercice 4, on peut répondre par simple connaissance des tables de multiplication ($6 \times 5 = 30$). Il s'agit des cas où quotient et diviseur sont « petits ». En outre, ici, la division « tombe juste ».
- Pour l'exercice 1, le diviseur est grand, mais le quotient est petit, on peut résoudre

le problème par des additions simples : 250 + 250 + 250 = 750, les nombres à additionner étant de surcroît simples.
• Pour l'exercice 2, on peut résoudre le problème en s'appuyant uniquement sur les propriétés de la numération décimale : 187 = 18 dizaines et 7 unités.
• Seul l'exercice 3, en raison de la complexité des nombres qui interviennent nécessite la mise en place de procédures spécifiques de la division (approche par des multiples : 8×43 » trop petit et 9×43 trop grand ; ou bien soustractions successives : 359 – 43 = 316, 316 – 43 = 273, etc…).

3- Division partition et division quotition
a) On peut résumer la classification proposée dans le document IV, en disant que les situations de division-partition sont celles où l'on recherche la valeur d'une part, alors que les situations de division-quotition sont celles où l'on recherche le nombre de parts. Les exercices proposés correspondent à cette terminologie : imaginons un tableau relatif à chacun des deux énoncés :

Ex 4.1 doc II

bouquets	fleurs
1	25
?	208

Division-quotition

Ex 2.2 doc III

vases	fleurs
1	?
10	187

Division-partition

b) Dans la division-quotition, les procédures se rapprochent des additions successives : pour compter combien j'ai de bouquets, je prends 25 fleurs, je fais un bouquet, s'il en reste assez, j'en reprends 25, etc… On est donc amené à faire 25 + 25 + 25 +…. L'amélioration de cette procédure débouche donc sur l'encadrement par des multiples.

Dans la division-partition, les procédures se rapprochent des soustractions successives (comme quand on distribue des cartes) : 800 tickets de jeu pour 250 enfants : j'en distribue un à chacun, il m'en reste 550, de quoi donner un autre ticket, etc… L'amélioration de ces procédures aboutira à l'algorithme usuel de la division.

4- Analyse de « j'ai appris »
• La notion de « combien de fois » qui sert à définir le quotient n'est pas très claire.
• Le reste n'est défini que par l'exemple et n'apparaît pas clairement comme ce qu'il faut ajouter à 25×6 pour obtenir 171.
• Le fait que le reste est plus petit que le diviseur n'est dégagé que pour des valeurs très particulières du diviseur (25, 50 et 100) et ne s'appuie pas sur des exemples ou des activités.
• Il faut noter favorablement l'accent mis sur la recherche de <u>deux</u> nombres.
• Le vocabulaire, dividende et diviseur n'est pas défini, pas plus que n'est définie la notion de divisibilité (reste nul).

5- Le terme « je découvre »
Ce terme n'est pas très adapté, il n'y a en effet pas de situation de découverte pour l'enfant, mais une tâche à accomplir. Cela est corroboré par le fait qu'il s'agit d'une deuxième leçon sur la division et que cette dernière a déjà été découverte. (On demande d'ailleurs de l'écrire et de la poser).

BESANÇON

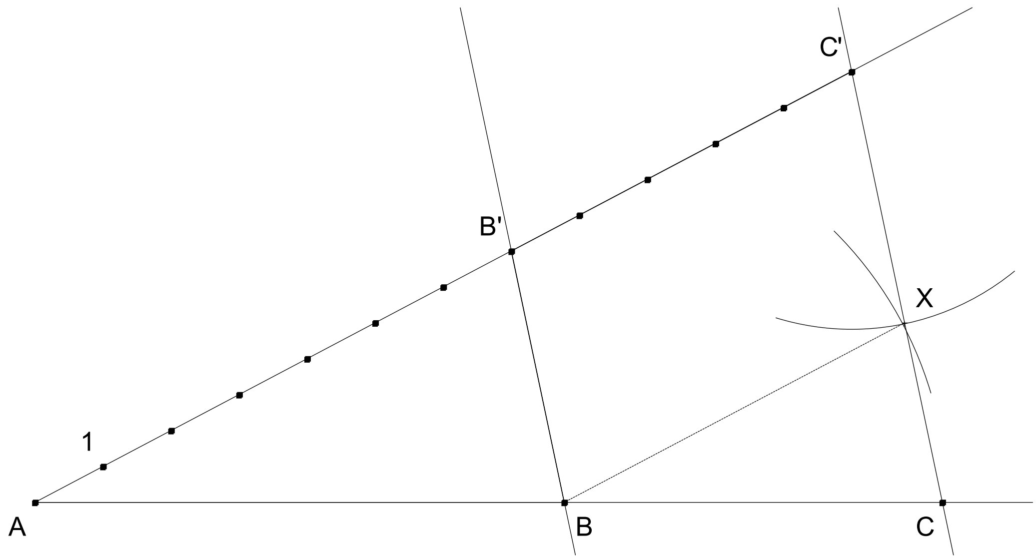
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

Exercice 1 (2 points)

On peut utiliser une demi-droite auxiliaire d'origine A, distincte de la demi-droite [AB), et après avoir choisi une longueur unité, on la gradue régulièrement : A a alors pour abscisse 0 ; on appelle B' le point d'abscisse 7et C' le point d'abscisse 12.
Le point C est obtenu par intersection de la droite (AB) et de la parallèle à la droite (B'B) passant par C'.
Construction de la parallèle : avec compas et règle, on construit par exemple le quatrième sommet X du parallélogramme (C'B'BX) ; X est obtenu par intersection d'un arc de cercle de centre B et de rayon B'C' et d'un deuxième arc de centre C' et de rayon B'B.
Montrons que le point C convient ; on peut appliquer le théorème de Thalès aux triangles AB'B et AC'C (puisque les deux droites (B'B) et (C'C) sont parallèles) et on obtient :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{12}{7} \qquad \text{d'où } AC = \frac{12}{7} AB$$



<u>Remarque</u> : on peut aussi construire le segment de longueur $\frac{1}{7}$ AB et le reporter 12 fois ; ou bien partager [AB] en 7 segments isométriques et reporter 5 de ces segments ...

Exercice 2 (2 points)

Appelons v et p les contenances (ou volumes intérieurs) respectives du verre et du pichet exprimées en cl.
On a donc : $5v = p$ et $600 = 9p + 3v$
Soit : $600 = 45v + 3v = 48v$
D'où <u>v = 12,5</u> (en cl) et <u>p = 62,5</u> (en cl)

Le verre a donc une contenance de 12,5 cl et le pichet de 62,5 cl.

Exercice 3 (4 points)

1) Le tableau donné des parités dans la zone euro indique que :
1 € = 1,95583 DM = 6,55957 FF

Donc : $330{,}60 \text{ FF} = 330{,}60 \times \frac{1{,}955853}{6{,}55957}$

En arrondissant au centième, on obtient la valeur du Napoléon en marks allemands : $\boxed{98{,}57 \text{ DM.}}$

2)
<u>Remarque</u> :
Il n'y a <u>qu'une</u> façon d'arrondir au dix millième : en regardant le chiffre des cent millièmes ; et <u>qu'une</u> d'arrondir au centième : en regardant le chiffre des millièmes.
On n'emploie "par excès" et "par défaut" que pour les <u>valeurs approchées</u>.
Le candidat n'avait donc aucun choix !

<u>Dates</u>	07/01	10/01	11/01	12/01	13/01	14/01
Dollar ($)	0,9713	**0,9752**	0,9689	0,9737	**0,9736**	0,9866
Euro (€)	1	1	1	1	1	1
Évolution en % par rapport à la date précédente		+ 0,40 %	**- 0,65 %**	**+ 0,50 %**	- 0,01 %	+ 1,33 %

<u>Premier calcul</u> : il y a augmentation de 0,40 % donc 0,9713 x 1,004 = 0,9751852 d'où l'arrondi de <u>0,9752</u>.

<u>Deuxième calcul</u> : il y a <u>diminution</u> de la valeur du dollar de 0,9752 – 0,9689, c'est à dire 0,0063. En pourcentage on obtient : $\frac{0{,}0063}{0{,}9752}$ = 0,006460213… ou <u>0,65 %</u> en arrondissant.

Troisième calcul : il y a cette fois augmentation de 0,9737 – 0,9689 = 0,0048, soit en pourcentage $\frac{0,0048}{0,9689}$ = 0,0049540716… ou encore 0,50 % en arrondissant.

Quatrième calcul : il y a diminution de 0,01 % donc 0,9737 x (1-0,0001) = 0,97360263 d'où l'arrondi de 0,9736.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

Question 1

	consigne 1	*consigne 2*	*consigne 3*	*Consigne 4*
Élève A	Tracé de deux segments [IJ] ***cf.(1)*** Mauvais mesurage du premier : 4,8 cm		Ne construit qu'une demi-droite : n'a sans doute pas prolongé sa construction à l'équerre	
Élève B	Tracé de deux segments [IJ] ***cf.(1)***		Droite "oblique" ; ne sait pas ce que perpendiculaire signifie ou n'a pas pris en compte cette information dans la consigne ***cf (3)***	
Élève C	Mauvais mesurage de [IJ] : 5,15 cm	D'où milieu M incorrect : IM = 2,5 et MJ = 2,65	Droite non exactement perpendiculaire : soit tracé "à vue", soit non-maîtrise de l'équerre.	* Erreur de centre : M à la place de J ***cf (2et3)*** *Rayon légèrement trop petit.
Élève D		Imprécision légère du milieu : JM = 2,4 ; IM = 2,5		* Erreur de centre : a pris le milieu de [JM] ***cf(2 et 3)*** * rayon trop petit.

Compléments d'analyse :

1) Les élèves A et B représentent deux fois le segment [IJ] et son milieu M, ce qui évidemment est incorrect (pour une figure, deux points distincts ne peuvent avoir le même nom), et B représente aussi deux fois ce qui est sans doute pour lui la droite perpendiculaire de la consigne 3. On peut avancer qu'ils ont simplement recommencé leur construction en oubliant de barrer leur premier essai.
L'élève A a peut-être une représentation de la perpendiculaire comme demi-droite verticale « posée » sur une droite horizontale, ce qui explique qu'il ait éprouvé le besoin de recommencer son segment [IJ] qui n'était pas horizontal.
Pour l'élève B, si l'on fait l'hypothèse que la disposition sur la feuille était celle du document de l'annexe 1, on pourrait supposer que B, manquant de place pour la construction du cercle à la consigne 4, a recommencé plus bas.

2) Pour les erreurs de centre des élèves C et D à la consigne 4, on peut avancer une confusion entre « centre » et « milieu », assez généralisée dans le langage courant, et qui, ici, a pu s'étendre de façon nette pour C : il a pris le seul milieu de ce programme de construction ; de façon moins nette pour D qui a peut-

être aggloméré les 2 notions en prenant comme l'élève C le seul milieu officiel : M et en le combinant avec le nouveau point J.

3) On peut avancer aussi que les erreurs des élèves B, C et D sont liées au nombre important de données à prendre en compte pour réaliser ce programme de construction : il s'agit peut-être alors de "surcharge cognitive", ajoutée éventuellement à une maîtrise insuffisante de la notion de perpendiculaire pour B, et de la notion de centre d'un cercle pour C et D.

Question 2

Compétences principales :

- être capable de construire une figure géométrique à partir d'une description des propriétés de ses constituants.
- .Comprendre un vocabulaire géométrique : segment, longueur, milieu d'un segment, droite perpendiculaire à … passant par …, cercle de centre … et de rayon … , et comprendre les deux notations [I J] et (I J).
- Maîtriser l'utilisation des outils de géométrie (règle, équerre et compas) et l'outil de mesurage (double-décimètre) pour construire un segment de longueur donnée (en cm), trouver le milieu d'un segment (par calcul puis mesurage), construire une perpendiculaire à une droite passant par un point (avec équerre et règle) et construire un cercle de centre et de rayon donnés (mesurage puis compas).
- Savoir trouver la moitié de 5.

Question 3

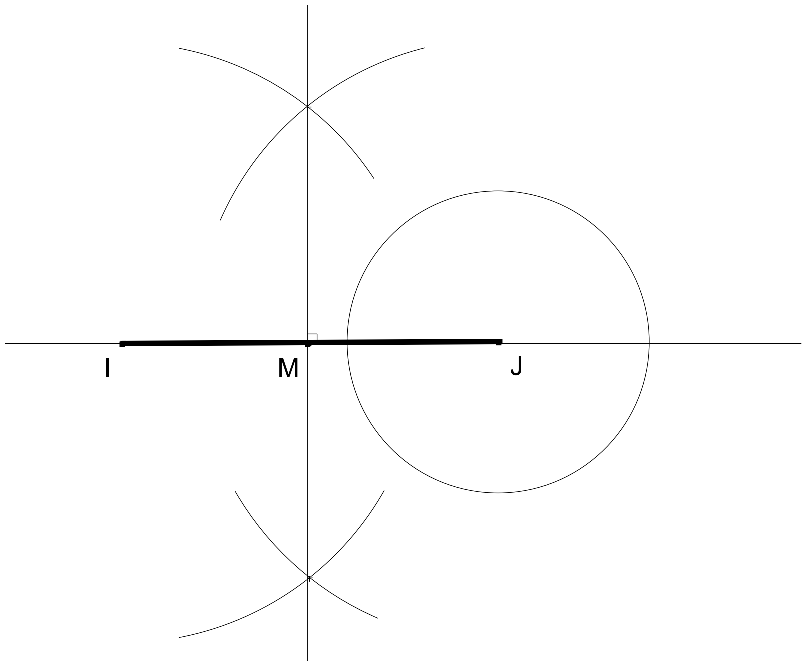
Remarque : Il faut comprendre ici qu'il s'agit de concept mathématique. La question est vague, donc la réponse pourrait se développer. Ce n'est pas ce qui est en général attendu dans une deuxième partie de premier volet

Certains concepts relèvent du cycle 3 : concepts de point, segment, droite, milieu d'un segment, droite perpendiculaire à une autre droite, cercle, centre et rayon d'un cercle.

Deux autres concepts pourraient être considérés comme sous-jacents :

- celui de médiatrice d'un segment, comme perpendiculaire à ce segment passant par son milieu
- celui de positions relatives d'une droite et d'un cercle : on a une droite (IJ) diamètre donc sécante au cercle et l'autre droite, la perpendiculaire, extérieure au cercle, mais "proche" d'une tangente).

Question 4
Figure construite à la règle et au compas (ce qui n'était pas la tâche des élèves) :



SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1
Cette activité peut être proposée en grande section de maternelle, ou en cours préparatoire, c'est à dire en début de cycle 2.

Question 2
Il s'agit d'être capable d'utiliser un tableau cartésien pour définir un objet (masque) en conjuguant deux propriétés - ici la forme des yeux (3 possibilités) et l'accessoire pileux (2 possibilités).

Remarque : Pour cela, il est nécessaire que les élèves comprennent la signification des signes figurant dans ce tableau : (la moustache de la colonne de droite est une propriété, la moustache pour chaque masque est la moustache du masque lui-même.). Il est facile de voir le problème lorsque l'on demande aux enfants combien il y a de moustaches : certains qui se réfèrent aux masques diront 3, d'autres diront 4… Ces sens différents pour un même signe sont une difficulté pour des enfants de cet âge et ne peuvent être traités comme si l'on avait affaire à des lecteurs ayant réglé cette question.

Les domaines mathématiques sont donc la logique et les connaissances spatiales (repérage des cases d'un quadrillage)

<u>On trouve dans le programme du cycle 2</u> :
- dans “Nombres et calcul” : « utilisation de tableaux »
- dans “Géométrie” : « quadrillages, repérages de cases »
- et surtout dans “Compétences transversales”, paragraphe “Traitement de l’information” “utiliser un tableau à double entrée” et “restituer et réorganiser les informations qu’il a réunies”.

Question 3

Remarque préalable : cette question, beaucoup trop ouverte, n’a pas place dans ce concours. Une réponse satisfaisante à cette question irait bien au-delà de ce qu’on peut attendre d’un candidat (cf note de service 94-271 du 16 nov.96). Nous en donnons une dans les compléments.
Nous donnons ci-dessous un exemple de ce que l’on peut attendre au concours. Cette réponse s’inspire en partie du livre dont a été tirée cette activité : Prépa-Maths, maternelle grande section, 2ème cahier (p 13), 1987.

<u>Niveau</u> : grande section, 3° trimestre ; les enfants ont déjà travaillé sur des quadrillages.
<u>Objectif</u> : “être capable d’utiliser des tableaux cartésiens”.
<u>Matériel :</u>
- des masques avec deux trous pour le nez et la bouche, et trois types de fentes pour les yeux (yeux ronds, demi-ronds, fendus)
- des chevelures en laine jaune, noire, rouge ou verte.

<u>**Déroulement:**</u>

<u>**1° phase :**</u>

Les enfants découvrent le matériel, le nomment.
La maîtresse explique la règle : on fabrique un masque en choisissant un type de fente pour les yeux, et en collant une chevelure.
Chaque élève réalise un masque (qui servira réellement pour se déguiser).

<u>**2° phase : introduire le tableau cartésien pour classer les masques**</u>

Les masques réalisés sont examinés collectivement et on se rend compte que certains sont identiques « Comment pourrait-on les ranger pour y voir plus clair ? »
La maîtresse pose alors sur le sol un grand tableau cartésien qu’elle a préparé et fait découvrir le fonctionnement aux enfants ; chacun vient poser son masque sur la bonne case : par exemple, s’il a les cheveux verts et les yeux ronds, on suit la ligne des cheveux verts, jusqu’à ce qu’on soit dans la colonne des yeux ronds
A partir de cette disposition en tableau cartésien, les enfants peuvent repérer « les trous » et trouver les masques manquants.
Quelques exercices permettent alors de bien comprendre le fonctionnement du tableau.

<u>**3° phase : présentation de la fiche**</u>

Après une brève activité préliminaire avec du vrai matériel (masques, barbes et moustaches) la maîtresse présente la fiche en expliquant la règle de fabrication des masques (ils ont soit une barbe, soit une moustache)

<u>**4°phase**</u>

La fiche est réalisée individuellement en atelier. Elle permet un réinvestissement individuel, dans un contexte un peu différent.

Question 4

Remarque :Cette question est complètement liée à la question 5) suivante, et il serait préférable de répondre en même temps à ces deux questions. Nous avons choisi d'y répondre séparément pour rester proche de ce qui était attendu au concours, mais il faudrait bien sûr mettre en relation les compétences dégagées dans la question 5 avec les variables de la question 4.

On a vu que cette activité est centrée sur l'utilisation d'un tableau cartésien pour définir des objets à l'aide de deux propriétés.

On peut identifier trois variables principales :

a) La nature des objets concernés par l'activité, et la nature des propriétés étudiées pour ces objets :

- Ici il s'agit de dessins d'objets, on peut envisager de proposer de vrais objets manipulables, ce qui permet de réaliser concrètement les différents couples , par exemple avec des poupées à habiller , en grande section, avec deux types d'habits (jupes et corsages, ou chapeaux et robes) : avec cette jupe, je peux mettre ce chemisier, ou bien ce tee-shirt etc…
- On peut envisager des objets plus abstraits (« blocs logiques » ou dessins géométriques) à classer suivant formes et couleurs, ou bien forme et taille, toujours en GS ou CP.
- En cycle 3, on peut envisager d'utiliser des tableaux cartésiens en géométrie (quadrilatères) ou dans d'autres domaines que les mathématiques (pour classer des feuilles, ou des animaux…)
- En CP, CE1, on peut classer les nombres jusqu'à 99 suivant le chiffre des dizaines et le chiffre des unités (« damier à 100 cases »)
- Le tableau cartésien est aussi utilisé dans les tables de Pythagore : pour l'addition (cycle 2) et pour la multiplication (cycles 2 et 3) : dans ce cas, chaque case correspond à un couple de nombres (a,b) et on écrit dans la case soit la somme (a+b), soit le produit (axb).

b) Le nombre de lignes et le nombre de colonnes (et par conséquence le nombre de cases) : le nombre de valeurs prises par les deux propriétés retenues pour les objets du tableau augmente et accroît la difficulté de lecture sans changer les règles de fonctionnement.

c) Le problème posé à l'aide de ces tableaux qui peut être de deux types principaux :

- Soit un problème de classement d'objets suivant deux propriétés pour par exemple présenter logiquement et clairement toutes les possibilités.
- Soit un problème de dénombrement où le but est de trouver le nombre de cases d'un quadrillage (cycle 2 et 3) ou de trouver le nombre d'objets possibles à partir du nombre de possibilités pour chacune des deux propriétés (en fin de cycle 3).

Question 5

1°) Quand le problème posé relève du classement d'objets :

Cycle	*Domaine mathématique*	*Nature des objets*	*Compétences visées*
2 3	Logique D'autres domaines en fonction des propriétés mises en jeu(géométrie dans le cas par exemple de quadrilatères, mais aussi botanique, ou zoologie)	Objets réels ou dessinés	Comprendre les règles de fonctionnement d'un tableau cartésien. Prendre en compte en même temps deux propriétés d'un objet
1 2 3	Organisation du plan	Dans tous les cas	Savoir repérer lignes, colonnes et cases (à partir du cycle 2 repérage aussi des nœuds) d'un tableau ou d'un quadrillage.
2 3	Numération décimale	Nombres à deux chiffres	Distinguer chiffre des unités et chiffre des dizaines.
2 3	Calcul	Couple de nombres qui définit une somme ou un produit	Savoir construire et utiliser une table d'opération (selon le cycle addition ou multiplication)

<u>2°)Quand il s'agit d'un problème de dénombrement :</u>

En cycle 2 et début de cycle 3, le dénombrement des cases d'un quadrillage donne du sens à la multiplication et permet une approche de la technique opératoire de la multiplication

En fin de cycle 3, le dénombrement des couples formés à partir de deux propriétés constitue un élargissement du sens de la multiplication (par exemple, combien de menus possible avec 3 entrées et 6 plats principaux).

> *Remarque : Il faut noter qu'il ne peut s'agir que d'une situation de recherche, basée sur une exploration préalable des possibilités, à l'aide du tableau , ou d'un arbre ; le dénombrement d'un produit cartésien à l'aide de la multiplication n'est enseigné …qu'en terminale.*

Compléments

1°) le document fourni (simple fiche d'élève) n'est pas suffisant pour que nous puissions répondre aux questions d'une façon pertinente. Les questions évoquent « l'activité » mais une fiche ne suffit pas pour définir « une activité »

- Ainsi, la réponse à la première question dépend de l'analyse de la tâche de l'élève et donc de la façon dont cette fiche est proposée en classe ; la réponse ci-dessus suppose que l'élève procède masque par masque ; pour chaque masque il prend en compte les deux propriétés (ligne et colonne) et il dessine les yeux et l'accessoire pileux ; mais il pourrait procéder autrement : ligne par ligne, puis colonne par colonne ; il commence par exemple par la ligne « moustache » et il dessine des moustaches aux trois masques de cette ligne, et il fait ainsi pour chaque ligne et chaque colonne ; dans ce cas, il ne s'agit pas de conjuguer deux propriétés pour un même objet (le masque), mais seulement d'être capable de suivre une consigne simple (du type : dessiner une moustache au bon endroit »), et de savoir suivre une ligne , ou une colonne. <u>On pourrait alors situer cette activité au cycle 1.</u>

2°) Les deux possibilités « moustache » ou « barbe » ne sont pas à priori exclusives l'une de l'autre : s'il est naturel de choisir une seule paire d'yeux, quelle règle interdit à un masque de porter à la fois moustache et barbe, ou bien ni moustache, ni barbe ? l'élève doit ici appliquer mécaniquement <u>les règles de fonctionnement du tableau cartésien</u>, sans se référer au sens de ce qu'on lui demande c'est à dire à la décoration réelle d'un masque, en explorant toutes les possibilités offertes.

<u>3°) Réponse détaillée à la question 3</u>

<u>Niveau</u> : grande section, 3° trimestre.

<u>Antécédents :</u>

- utilisation collective de tableaux cartésiens dans des activités liées à la vie de la classe (gestion des ateliers par exemple)
- en atelier : activités sur quadrillage (déplacements / reproduction de dessins) ayant permis de dégager les notions de lignes et colonnes.

<u>Objectif général</u> : "être capable d'utiliser des tableaux cartésiens".

<u>Objectif particulier :</u> réaliser un tableau pour trouver tous les masques que l'on peut faire à partir de deux propriétés données.

Nous choisissons une résolution collective de ce problème car nous pensons qu'il est difficile d'envisager en GS une résolution sans aide de la maîtresse, et à peu près impossible que ce problème soit résolu spontanément par un tableau cartésien. Mais, si le tableau ne peut pas être inventé par les enfants, la résolution de ce problème, avec l'aide de la maîtresse, permet aux enfants d'en percevoir l'utilité.

<u>Matériel :</u>

- des masques avec deux trous pour le nez et la bouche, et trois types de fentes pour les yeux (yeux ronds, demi-ronds, fendus)
- des chevelures en laine jaune, noire, rouge ou verte.

<u>Activité 1</u>

Découverte du matériel, les types de fentes sont nommées, ainsi que les couleurs des chevelures.

Enoncé de la règle : on fabrique un masque en choisissant un type de fente pour les yeux, et en collant une chevelure.
Chaque élève réalise un masque (qui servira réellement pour se déguiser).
Collectivement :
- Chacun montre son masque et le décrit (« il a les yeux fendus et les cheveux rouges ») ; qui en a un pareil ?
- Inversement, la maîtresse décrit un masque « il a les yeux ronds et les cheveux jaunes », ceux qui pensent l'avoir le posent par terre sous le contrôle des autres; les erreurs sont commentées : « celui-là a bien les cheveux jaunes mais il n'a pas les yeux ronds ! il faut qu'il ait les cheveux jaunes et aussi les yeux ronds, les deux en même temps ! » ; chaque fois, un seul masque correspondant à la description est laissé par terre, les autres sont repris par les enfants.
- Quand tous les masques différents réalisés sont posés par terre, la maîtresse demande un masque que personne n'a fait, ce qui introduit l'activité suivante.

Activité 2

« Nous n'avons pas réalisé tous les masques possibles ! comment faire pour les trouver tous ?
Comment pourrait-on ranger les masques que nous avons faits pour bien voir ceux que nous pourrions faire encore ? »
A partir des propositions des enfants, la maîtresse les aide :
- à disposer d'abord sur 3 lignes les masques qui ont le même type de fente d'yeux.
- à faire des permutations à l'intérieur des lignes pour mettre dans la même colonne ceux qui ont la même couleur de cheveux.

A partir de cette disposition en tableau cartésien, les enfants peuvent repérer « les trous » et trouver les masques manquants, qui sont désignés puis réalisés.
Quand il n'y a plus de trou, la maîtresse fait trouver le codage des lignes (masques sans cheveux avec le type de fente d'yeux) et le codage des colonnes (chevelures de chaque couleur) et des traits sont tracés à la craie sur le sol pour bien visualiser le tableau complet, avec codage des lignes et des colonnes.
Quelques exercices permettent aux enfants de s'approprier ce tableau : on cache un des masques, un enfant le décrit, on soulève le cache pour vérifier. Les commentaires réalisés précisent le fonctionnement du tableau : « le masque est sur cette ligne, il a donc les yeux demi-ronds, il est sur cette colonne, il a donc les cheveux verts »

Activité 3

L'activité proposée dans le document permet un réinvestissement individuel, dans un contexte un peu différent. Elle pourra être proposée en atelier, après une brève activité préliminaire avec du vrai matériel (masques, barbes et moustaches) pour préciser la règle de fabrication des masques (ils ont soit une barbe, soit une moustache).

BORDEAUX, CAEN, CLERMONT, NANTES, ORLÉANS-TOURS, POITIERS, RÉUNION

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

a) Dans le triangle SEF, I est le milieu de [SE] et L est le milieu de [EF], donc (IL) est parallèle à (SF) (droite des milieux d'un triangle). De même, dans le triangle SGF, (JK) est parallèle à (SF).
On en déduit que (IL) est parallèle à (JK).
On montre de même, en utilisant les triangles SEG et FEG, que **(IJ) est parallèle à (LK).**
Le quadrilatère IJKL qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme.
On peut accepter une démonstration qui utilise l'égalité et le parallélisme de deux côtés opposés (tolérance sur la convexité).

b) On a IL = $\frac{1}{2}$ SF (triangles (EIL) et (ESF) homothétiques dans une hométhétie de centre E et de rapport $\frac{1}{2}$), de même LK = $\frac{1}{2}$ EG donc si SF = EG, le **parallélogramme IJLK** a deux côtés consécutifs de même longueur et **est un losange**.

c) Si (SF) est orthogonale au plan (EFG), (IL), qui lui est parallèle, est également orthogonale au plan (EFG) et est donc orthogonale à toute droite contenue dans ce plan. La droite (LK) est contenue dans le plan (EFG) : (IL) et (LK) sont donc perpendiculaires.
Le parallélogramme IJKL dont l'un des angles est droit est un rectangle.

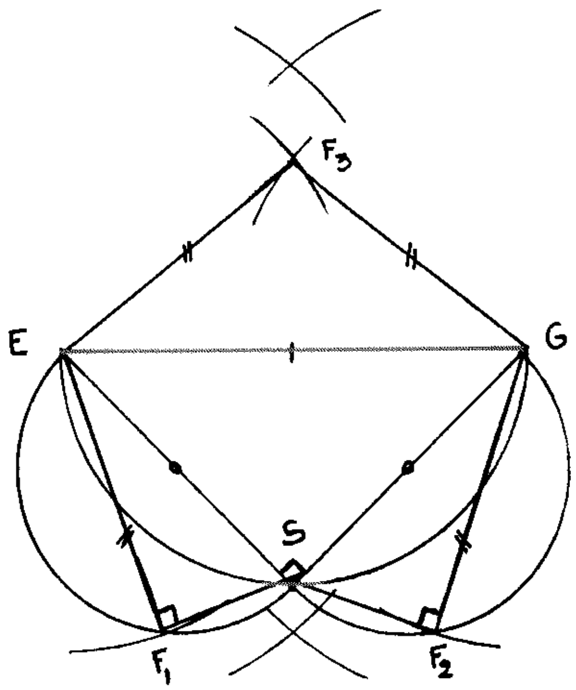
d) Le quadrilatère SIMJ est toujours un parallélogramme car ses côtés opposés sont toujours parallèles deux à deux : (SI) // (JM) (droite des milieux dans le triangle (GSE)) et (SJ) // (IM) (droite des milieux dans le triangle (GSE).
Pour qu'un parallélogramme soit un losange, il suffit qu'il ait deux côtés consécutifs isométriques et donc que SI = SJ.

Comme SI = $\frac{1}{2}$ SE et SJ = $\frac{1}{2}$ SG, cette condition est remplie lorsque SE =SG
Pour que le quadrilatère SIMJ soit un losange, il suffit donc que le triangle SGE soit isocèle.

e)

Si le triangle SEG est rectangle en S, le parallélogramme SIMJ a l'un de ses angles qui est droit. C'est donc un rectangle.

f) **SEG rectangle isocèle en S** assure **SIMJ** losange et rectangle donc **carré.**
(SF) ⊥ (EF) et (SF) ⊥ (FG) assure (SF) orthogonale au plan (EFG) donc **IJKL rectangle**.
La pyramide SEFG est constituée de quatre faces triangulaires ayant les caractéristiques suivantes :
(SEG) rectangle isocèle en S
(SFG) et (SFE) triangles isométriques rectangles en F, (EFG) isocèle de sommet F.
Plusieurs patrons peuvent être construits (en particulier, en partant du triangle EGS (figure 1) ou du triangle EFG (figure 2)).



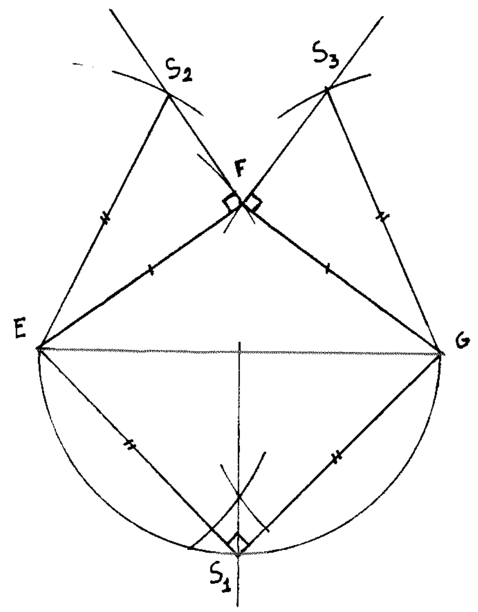


figure 1	*figure 2*
On part de EGS : les triangles GSF_2 et ESF_1 doivent être isométriques et rectangles respectivement en F_2 et F_1 , les côtés EF_3, GF_3 doivent avoir même mesure que EF_1 et GF_2.	On part de EFG : ce triangle est **isocèle** et l'angle en F est **obtus**. Ensuite, on construit EGS_1 et on construit les deux triangles EFS_2 et FGS_3 (avec ES_1=ES_2=GS_3).

EXERCICE 2

1) $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$ $728 = 2^3 \times 7 \times 13$

Les nombres entiers diviseurs communs de 924 et 728 sont 1,2,4,7,14,28

Donc les valeurs possibles de la distance entre deux arbustes sont 1m, 2m, 4m, 7m, 14m, 28m.

2) Il y a autant d'arbustes que d'intervalles entre arbustes. Le périmètre du terrain est $2 \times (924 + 728)$ soit 3304 m.

Distance entre deux arbustes	1	2	4	7	14	28
Nombre d'arbustes nécessaires	3304	1652	826	472	236	118

EXERCICE 3

Dans la division euclidienne de a par 11, soit r le reste. On a : $a = 11q + r$ avec $0 \leq r \leq 10$. (r et q sont des entiers naturels).

Dans la division euclidienne de a' par 11, soit r' le reste. On a : $a' = 11q' + r'$ avec $0 \leq r' \leq 10$. (r' et q' sont des entiers naturels).

a) $a + a' = 11\,(q + q') + (r + r')$ avec $0 \leq r + r' \leq 20$

On peut divisier r+r' par 11 : on obtient un quotient q_1 et un reste r_1 avec $r+r' = 11\,q_1 + r_1$ et donc $a + a' = 11(q + q' + q_1) + r_1$ avec $0 \leq r_1 \leq 10$.

Le reste de la division euclidienne de a + a' par 11 est le reste de la division euclidienne de r + r' par 11.

On peut distinguer 2 cas :

Si $0 \leq r + r' \leq 10$, alors
$r + r'$ est le reste de la division euclidienne de a + a' par 11.

Si $11 \leq r + r' \leq 20$ alors $a + a' = 11\,(q + q' + 1) + r + r' - 11$ et $0 \leq r + r' - 11 \leq 9$ alors le reste de la division euclidienne de a + a' par 11 est $r + r' - 11$.

b) $3a = 11 \times 3q + 3r$ et $0 \leq 3r \leq 30$

On peut diviser 3r par 11 : on obtient un quotient q_1 et un reste r_1 : $3r = 11q_1 + r_1$ avec $0 \leq r_1 \leq 10$. alors il vient $3a = 11\,(3q + q_1) + r_1$

Le reste de la division euclidienne de 3a par 11 est le reste de la division euclidienne de 3r par 11.

On peut distinguer 3 cas :

$0 \leq 3r \leq 10$. $11 \leq 3r \leq 21$ $22 \leq 3r \leq 30$.

Le reste cherché est 3r dans le premier cas, 3r - 11 dans le second, 3r - 22 dans le dernier cas.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1°- Difficultés pour élève en début cycle 3

Difficulté : ce problème ne peut pas se résoudre par un enchaînement de raisonnements et d'opérations comme les problèmes classiques résolus à l'école primaire.
On peut, en outre, remarquer qu'une difficulté du texte est la présence du mot “ de plus ” qui induit l'addition 73 + 11 (remarque faible en regard de ce qui précède).

Compléments : ce qui précède est la réponse attendue et il s'agit d'une difficulté qui dépasse le début du cycle 3. Les candidats peuvent donner certains développements soit pour expliciter cette phrase, soit pour la remplacer :

<u>C'est un problème comportant deux inconnues, le lot de chaque enfant .</u>
Comme il y a aussi deux renseignements il se résout bien algébriquement par un système de deux équations qui suit le texte au plus près

$$y = x+11 \quad ou \quad y - x = 11$$
$$x+y = 73 \quad ou \quad y+ x = 73$$

Deux difficultés selon la méthode de résolution dans laquelle on s'engage:
1) <u>arriver à transposer en arithmétique une solution algébrique sans les outils de l'algèbre</u>.:
La solution à transposer est celle d'une seule équation à une inconnue obtenue du premier coup en faisant mentalement
- soit la substitution (système 1) $x + x + 11 = 73$ *d'où* $2x = 73-11$
- soit l'addition (système 2) $2y = 73 + 11$
Pour cela une représentation par un dessin réalisé ou imaginé est indispensable pour comprendre qu'on peut non pas calculer une part tout de suite mais calculer son double.

2) <u>faire une hypothèse et la tester en osant choisir une fausse valeur arbitrairement et respecter seulement une des deux conditions imposées</u>. Corriger en tenant compte de l'autre condition.
Les candidats pourraient rajouter que la solution 2 est la vraie solution arithmétique mais le savoir expert correspondant (dit méthode de la “ fausse position ”) n'est plus enseigné.

2°- Analyse des réponses

Groupe A : Solution juste
Fait une hypothèse sur la plus petite valeur et en déduit l'autre en respectant la différence de 11. La première hypothèse n'est pas très éloignée de la solution, ce qui suppose une bonne fréquentation des nombres.
Teste l'hypothèse en calculant la somme et rectifie en conséquence l'hypothèse émise.
Arrive à 73 en trois coups en procédant par encadrement (73 compris entre 71 et 75 donc choix de l'hypothèse juste 31 compris entre 32 et 30).

Groupe B : Pas de solution
Divise 73 en deux en répartissant équitablement les dizaines et les unités sous le dessin des enfants (3 dizaines de chaque côté, puis 5 + 1 unités soit 36 + 36 =72) .
Abandon après s'être rendu compte que la somme ne faisait pas 73 (7 barré).
Ajoute 11 à 73 (mot “ en plus ” dans le texte) puis retranche 11 à 73 deux fois. Abandon.

Groupe C : Solution fausse
Décomposition de 73 en 7 dizaines et 3 unités (2 + 1). Isole dans cette décomposition 10 + 1 = 11.
Répartit les dizaines et les unités en deux additions sous les noms des personnages : 3 dizaines chacun, puis 11 pour Flora. Il reste 2 unités qui ne sont pas réparties mais attribuées à Flora d'où l'erreur.
Flora a une de trop et Thimothée une de moins.

Groupe D : Solution juste malgré une erreur de calcul ou d'écriture semble-t-il
Fait deux parts dans 73 sous les noms des enfants, en procédant pas à pas : 10 à chacun, ensuite 5, puis 3 (trois fois), puis 2 (trois fois), obtient 32 pour le premier (en fait il n'y a que 30 semble-t-il) puis ajoute 11 au second ce qui donne 32 et 43.

Teste la somme comme le groupe A, constate que la somme est trop grande et diminue chaque part d'une unité en transformant dans chacune des additions un 2 en 1 d'où 31 et 42. (Sauf si la place du 1 a été prévue au départ …).

Une synthèse peut remplacer ou conclure cette analyse cas par cas :

Les groupes A, C et D s'approchent de la solution en respectant la condition de la différence 11.
Les groupes A et D corrigent leur(s) hypothèse (s) en testant la somme, le groupe C ne la corrige pas. Les groupes B, C, D procèdent en répartissant les images soit sous les dessins des deux enfants, soit sous leur nom. C et D veillent à répartir 73-11. Le groupe B divise 73 par 2 et n'aboutit pas.
Cette répartition permet au groupe D de tester une seule hypothèse (32 et 43) avant la bonne alors que le groupe A, qui évite cette longue procédure de répartition, fait deux hypothèses avant la bonne.

3°- Procédures valides de niveau élève :

Une procédure de type A ou D sans erreur d'écriture peut être reprise. Sinon les candidats peuvent proposer par exemple une des procédures suivantes (procédure algébrique, hypothèse et test, prolongement de la procédure B)

a- Ils ont ensemble deux fois la part de Timothée et 11 images. Deux fois la part de Timothée c'est donc 73-11 = 62 images. Donc Timothée a 62 : 2 = 31 images et Flora a 31 + 11 = 42 images

b- Hypothèse : Timothée a 25 et Flora : 25 + 11=36. Total 25 + 36 = 61.
Manque 73 – 61 = 12 à répartir sur chacun : 12 : 2 = 6, soit 25 + 6= 31 et 36 + 6 = 42

c- Hypothèse : Timothée a 25 et Flora 73 – 25 = 48. La différence est 48 – 25 = 23 trop grande de 23 – 11 = 12. On doit corriger de 12 : 2 = 6 soit 25 - 6 = 31 et
48 – 6 = 42.
Nous avons pris l'hypothèse de 25 pour mettre en évidence que n'importe qu'elle hypothèse peut donner la réponse mais l'hypothèse la plus naturelle et habile est 30 et 43.

d- Division de 73 par 2 ce qui donne 2 fois 36 et reste 1. Prendre 36 et 37 donnerait un écart de 1 au lieu de 11. Il faut donc enlever 5 (moitié de 10) pour avoir le plus petit nombre soit 36 – 5 = 31 et rajouter 5 pour avoir le plus grand (37 + 5 = 42).

SECOND VOLET (8 POINTS)

1 - Questions sur l'ensemble du document
contenu mathématique : c'est la division euclidienne des entiers.
les trois objectifs principaux sont :
- reconnaître et résoudre un problème de division.
- apprendre le vocabulaire de la division.
- utiliser l'égalité a = bq + r.

Les candidats peuvent éventuellement développer et préciser davantage :
- permettre aux élèves de s'approprier une procédure par tâtonnement pour diviser un entier de deux chiffres par un entier assez petit (< 20) pour obtenir un quotient euclidien de deux chiffres au plus et lui aussi assez petit (<20)
- leur apprendre le vocabulaire : dividende, diviseur, quotient[1] , reste.
- leur apprendre à vérifier leur résultat de q et r en utilisant l'égalité a = bq + r.
- leur faire trouver le quotient et le reste en complétant l'égalité a = (b x ...) + ... sans oublier que le reste doit être inférieur à b et attirer l'attention sur le fait que r peut être nul dans cette égalité.
- introduire le calcul en ligne : multiplication entre parenthèses puis addition sur la même ligne.

- Question sur la partie : " piste de recherche "

a - Activité de l'élève :
Dans le 1, aucune question n'est posée. L'activité de l'élève va dépendre de ce que le maître décidera . Au minimum il doit lire pour lui-même et essayer de comprendre les procédures des enfants fictifs.
Dans le 2, l'élève doit rajouter deux enfants et constater que 3+2 = 5 et 5 < 11. On ne peut pas faire un groupe supplémentaire donc il y a toujours 4 groupes et 5 enfants vont recevoir un tambourin.
Dans le 3, l'élève doit choisir une méthode pour faire la division et la comprendre suffisamment pour l'appliquer, en remplaçant 47 par 49 et 11 par 15. Il est possible que l'élève ne puisse s'approprier aucune des méthodes proposées qui le gêneront plutôt pour inventer la sienne. Il peut prendre alors la plus primitive, celle du dessin. Il fera 49 points et les groupera par 15.

b - Cyril : Dessine la collection des objets à partager et figure les groupes. Compte les groupes formés (pour avoir le **quotient**) et **le reste.**
Dorothée : Fait des soustractions successives de 11 jusqu'à trouver un nombre plus petit que 11 qui est le **reste.** Compte le nombre de soustractions pour avoir le **quotient.**
Eric : Calcule les multiples successifs de 11 (table de 11) et s'arrête dès qu'il a dépassé 47.
Le **quotient** est le multiplicateur précédent. Calcule le **reste** par différence.

[1] il faudrait préférer le vocabulaire quotient euclidien car le quotient de 47 par 4 est le décimal 11,75 alors que le quotient euclidien est 11.

<u>Dans leur ensemble, ce sont bien des procédures proposées par les élèves mais de nombreux détails d'écriture les rendent improbables :</u>

- Le dessin est une procédure primitive qui vient plutôt en CE2 et qui a peu de chances d'apparaître en CM1. La proposer aux enfants peut les faire régresser. Elle pourrait être gardée comme moyen de vérification empirique du résultat
- Ce contexte de division-quotition (recherche du nombre de groupes) permet effectivement de voir émerger une procédure de type soustractif mais une procédure de type additif est plus fréquente (additions successives de 11 ou de multiples de 11).
- Il est peu probable qu'un élève commence par écrire :1x 11 = 11, puis 55 > 47 et qu'il finisse en écrivant justement l'égalité attendue en ligne : 47 = (11x4) + 3. D'abord parce que c'est difficile (parenthèses ou priorité de la multiplication) et aussi parce qu'il n'en verra pas la nécessité. Il se contentera bien souvent de quelques essais multiplicatifs avec les ajustements nécessaires.
- En général les élèves les élèves utilisent, très souvent, des procédures mixtes :
  - multiples et on termine par additions pour ajuster
  - soustraction, puis soustraction de multiples pour accélérer

Ces procédures ont peu de chances d'apparaître ici vu la taille des nombres (très petits) et le cas particulier de 11 qui se prête aux additions successives.

<u>c - autre démarche :</u>

- l'enseignant ne propose pas aux élèves des procédures artificielles mais leur propose directement le problème et les laisse libres d'inventer eux-mêmes leurs procédures.
- l'enseignant modifie les nombres :

quotient plus grand (deux chiffres) en augmentant le dividende (plus grand que 250 au moins)

autre diviseur (ex : 24) car 11 favorise trop les additions successives. (du moins jusqu'à 99)

- l'enseignant prévoit avec les élèves une procédure de validation. Ils devront donc tous faire un calcul réfléchi pour anticiper le résultat en sachant qu'il sera possible de vérifier ensuite.
- l'enseignant organise la mise en commun des résultats et des méthodes.

Des résultats différents amènent la question de savoir qui a raison. Pour trancher, les élèves débattront entre groupes de différents résultats et en dernier lieu on aura une preuve empirique (des dessins et faire les groupements et en mieux représenter les enfants par des cubes ou des allumettes) ou une preuve intellectuelle (retrouver le dividende par le calcul) qui permet d'amener la relation fondamentale entre les 4 termes.

Parmi les méthodes fournies par les élèves au cours des problèmes successifs l'enseignant en retient deux :

- l'encadrement du dividende par deux multiples consécutifs du diviseur qui permet de trouver la relation fondamentale.
- les soustractions successives qu'on va essayer d'accélérer en provoquant des soustractions de multiples.

3 - Questions sur les “ applications ”

a- Evolution entre 1 et 2

L’évolution se traduit sur deux axes :

- **imposer en 2 le passage à l’écriture formalisée a= bq + r pour donner la réponse**. Dans cette écriture, le reste doit être explicité, ce qui n’était pas le cas dans le 1. Dans les deux exercices, les élèves ont le libre choix de la méthode. Mais pour le second, cette méthode devient privée. Officiellement, seule l’égalité complétée doit apparaître. Sa fonction est : soit de traduire le résultat du calcul, soit de fournir la méthode même pour calculer le résultat. Dans ce cas, veiller à ce que le reste soit inférieur au diviseur est important car, il y a plusieurs façons de compléter l’égalité
- **changer la nature des objets à partager**. Il s’agit maintenant des jours de la semaine que l’on imagine plus difficilement de mettre en groupes ou en tas comme des enfants ou des points d’essence. Le nombre 7 apparaît dans l’égalité à trou mais pas dans le texte du problème où on ne trouve qu’une seule donnée : le dividende. Le diviseur est une connaissance culturelle à utiliser pour résoudre le problème.

Remarque : cette évolution ne porte ni sur l’ordre de grandeur du quotient (qui est à un chiffre dans les deux cas et même devient plus petit (- 8 pour le premier et 4 pour le second-) alors que c’est la variable didactique la plus importante dans un problème de division) ni sur l’ordre de grandeur conjoint du dividende et du diviseur (dividende 50 dans le premier et 31 dans le second et diviseur à un chiffre dans les deux cas).

b- difficulté de l'application 3 :

difficulté relative à la division elle-même : **il s’agit d’un problème où le reste est nul,** qui ne présente pas de difficulté particulière en soi, mais l’exigence de l’écriture de l’égalité avec une place pour une inconnue qui doit être occupée par 0 pose problème. Pour l’élève il n’y a pas de reste. La difficulté est de donner à 0 le statut d’un nombre, qui peut être la valeur à écrire dans une égalité.

difficulté extérieure à la division : **la connaissance suffisante d’un jeu de cartes**, même si tout ce qui est nécessaire au problème est rappelé ici (le nombre 4 qui n’apparaît pas dans l’énoncé -comme le 7 précédent - vient des 4 sortes de cartes qui possèdent le même nombre d'éléments).

Remarque : cette situation est, pour la première fois, une situation de division-partition (recherche de la valeur d'une part) et cette situation ne favorise pas une multiplicité de procédures (ce type de situation bloque généralement la procédure de soustractions successives, ici non significative).

4°- Questions sur les prolongements

a- les différentes valeurs du reste :

Exemple 1 : Proposer un problème où le diviseur et le quotient euclidien sont connus (ex diviseur 6, quotient 7) : on cherche le dividende et le reste. Il y a plusieurs solutions pour r : 0, 1, 2, 3 , 4, 5 donc aussi pour le dividende.

Un habillage possible: La fermière a mis des œufs dans un panier. Elle veut les emballer dans des boîtes de 6. Elle ne peut emmener au marché que des boîtes pleines. Elle a pu remplir seulement 7 boîtes. On ne voit pas s’il y a encore des œufs dans le panier. Comment savoir le nombre d’œufs qu’avait la fermière dans le panier avant l’emballage?

Exemple 2 : Continuer l'histoire de la chorale dans laquelle on fait des groupes de 11 chanteurs et on prévoit des tambourins pour les enfants qui ne pourront pas se mettre en groupes. On ne sait pas encore le nombre exact de chanteurs. Peut-on prévoir tout de même combien de tambourins il peut y avoir?

Exemple 3 : L'enseignant commence au tableau un classement des nombres à partir de 0 en 6 colonnes

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	.....	.....			

Il s'agit de prévoir dans quelle colonne (déterminée par le reste dans la division par 6) et éventuellement dans quelle ligne (quotient dans la division par 6) va se trouver un nombre donné.

Remarque : Ce problème est difficile et de niveau CM2. On peut l'accepter dans la mesure où il s'agit de prolongements.

<u>b – L'égalité de la division</u> :
Il s'agit de reconnaître si une égalité traduit ou non une division euclidienne et où sont les éléments.
Exemple de problème:
Voici plusieurs égalités. Avec une de ces égalités et sans faire de calcul, tu pourras résoudre le problème écrit à côté.

105 = (13 x 7) + 14 105 = (4 x 23) + 13 105 = (8 x 13) +1 105= (13 x 9) – 12	Julie a 105 F et veut acheter des cahiers qui coûtent 13F. Elle veut savoir quel est le plus grand nombre de cahiers qu'elle peut acheter. Où bien, quel est le quotient et le reste de la division de 105 par 13.

<u>c-Trace écrite :</u>
Faute de renseignements suffisants sur la place de cette fiche dans la progression et sur les modalités d'utilisation de la fiche en classe, on ne sait pas ce que les élèves ont appris. Toutefois, en supposant qu'il s'agit de la première leçon sur la division en CM1, ce qui paraît probable, on peut :
Reprendre l'encadré proposé dans la partie 1 : 47 = (11 x 4) + 3, avec les flèches indiquant où sont dividende, diviseur , quotient et reste.
On ajoute les trois phrases suivantes :
Cette égalité traduit la division de 47 par 11.
Dans une division, le reste est toujours plus petit que le diviseur. Il peut être égal à 0.

CRETEIL, PARIS, VERSAILLES

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE N°1 (5 points)
1°) Détermination de la longueur IJ

• 1ère méthode : Rappelons le théorème dit de la « droite des milieux » dans un triangle : la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, et le segment joignant ces milieux est égal à la moitié du troisième côté (en longueur, bien sûr). Tout d'abord ABCD est un rectangle inscrit dans le cercle de rayon [OR] donc sa diagonale [AC] est aussi un diamètre du cercle d'où AC = 10 cm sur le plan.
Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC] donc par la propriété de la droite des milieux : $IJ = \frac{1}{2}AC = 5$ cm.

• 2ème méthode : On démontre que OIBJ est un rectangle, ainsi [IJ] et [OB] sont ses deux diagonales. Les diagonales d'un rectangle étant de même longueur on obtient alors que IJ = OB = OR = 5cm.
Les droites (IK) et (JL) sont les deux médianes du rectangle ABCD ; ce sont aussi les deux axes de symétrie de ABCD. Ainsi on peut affirmer que la droite (IK) est la médiatrice du segment [AB] et que la droite (JL) est la médiatrice du segment [BC]. De plus ABCD étant un rectangle, l'angle ABJ est droit. Ainsi le quadrilatère OIBJ possède au moins trois angles droits donc c'est un rectangle.

2°) Nature du quadrilatère IJKL

1ère méthode : en utilisant le théorème de la droite des milieux vu à la question précédente, on calcule de la même façon la longueur des segments [JK], [KL] et [IL] et l'on trouve que IJ = JK =K L =LI donc que le quadrilatère est un losange (quatre côtés égaux).

2ème méthode : en montrant que les diagonales du quadrilatère IJKL se coupent en leur milieu perpendiculairement.
On utilise le fait que les deux axes de symétrie d'un rectangle se coupent perpendiculairement en un point qui est le centre de symétrie de ce rectangle. Ainsi le point O est le centre de symétrie du rectangle ABCD, c'est aussi le milieu des diagonales du quadrilatère IJKL. Donc ces diagonales se coupent en leur milieu et perpendiculairement. On en conclut que IJKL est un losange.

> *Remarque :* On peut se demander à quelles conditions ce quadrilatère est un carré. Pour cela, il faut (et il suffit) que deux côtés consécutifs soient perpendiculaires, donc, par exemple, que (IJ) et (JK) soient perpendiculaires. Compte tenu des relations de parallélisme résultant des droites des milieux, cela est équivalent à (BD) et (AC) perpendiculaires. Enfin, les diagonales du rectangle ABCD sont perpendiculaires si et seulement si c'est un carré. En conclusion, IJKL est un losange, et c'est un carré si et seulement si ABCD en est un.

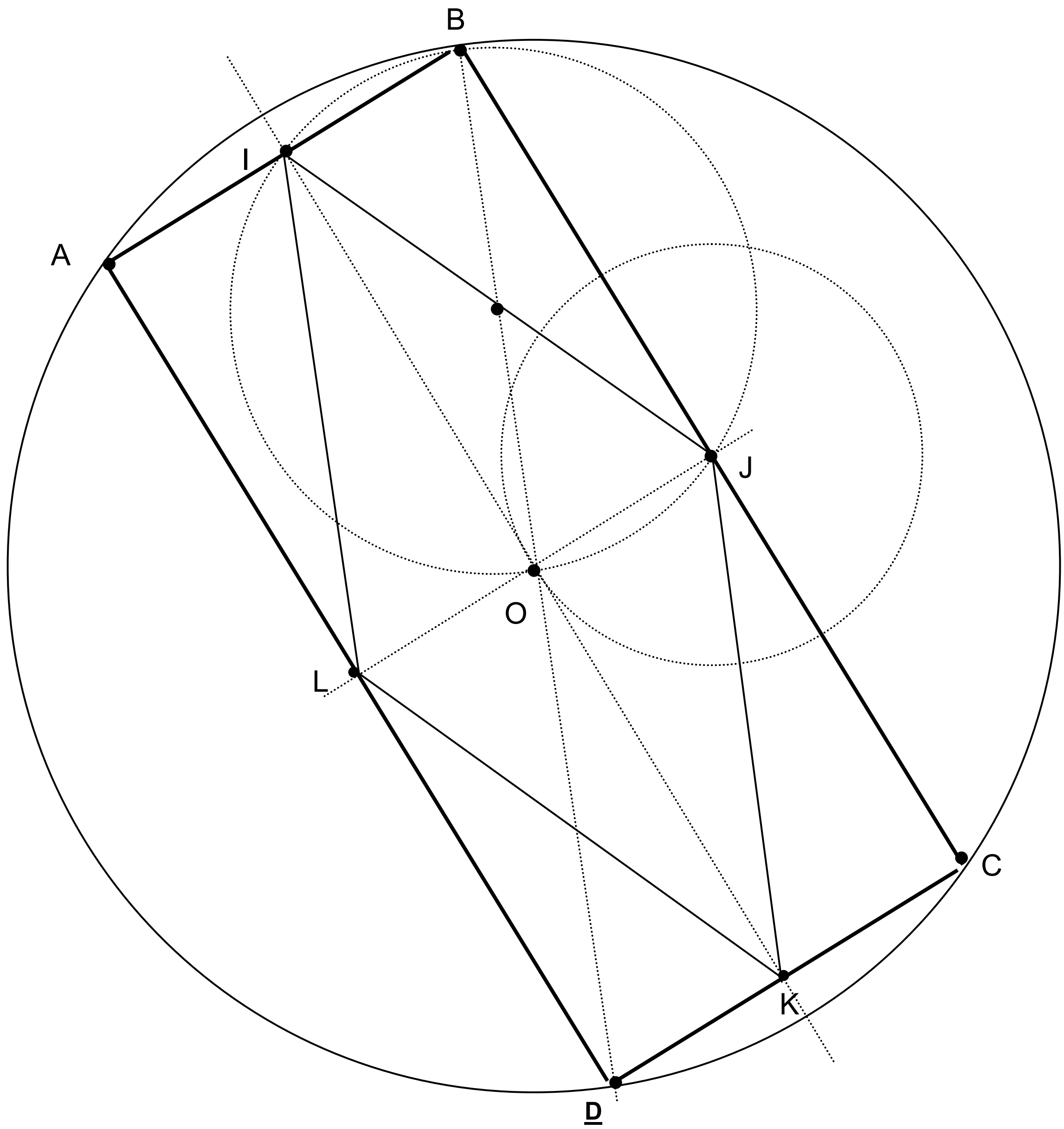
3°) Quelques indications concernant cette construction :
Si l'on suppose connu le point O, la construction est aisée, puisqu'on construit B, symétrique de O par rapport au milieu de [IJ]; puis A et C respectivement symétriques de B par rapport à I et J. Enfin on construit D, symétrique de B par rapport à O. (Les symétriques se construisent aisément en reportant des longueurs, les milieux s'obtiennent aussi facilement puisqu'on dispose d'une règle graduée).
Le problème se ramène donc à la détermination, et à la construction du point O. Analysons les propriétés de ce point :

• D'une part, il est sur le cercle de diamètre [IJ], car le triangle IOJ est rectangle en O.

• D'autre part, on a $OJ = \frac{2}{5} IJ$, car AB, la largeur du rectangle, vaut les quatre cinquièmes du rayon, et l'on a vu que ce rayon n'était autre que IJ.

• Enfin $OJ = IB = \frac{1}{2} AB$. Donc, sur notre figure, OJ = 3cm.

La construction du point O est donc « immédiate » : il est à l'intersection du cercle de diamètre [IJ] et du cercle de centre J et de rayon 3 cm (il y a deux points possibles : ils livrent tous deux la même figure, à une symétrie par rapport à (IJ) près).



Remarque : L'usage de la règle graduée est ici facultatif (mais il simplifie notablement la tâche). En effet, la construction des milieux peut être effectuée en construisant une médiatrice. Le seul vrai problème réside dans la construction de la longueur OJ égale aux deux cinquièmes de IJ. Ce problème peut être résolu uniquement au compas et à la règle non graduée ; il s'agit d'une application du théorème de Thalès : tracer par I et J deux droites parallèles (par exemple, deux perpendiculaires à (IJ)), sur l'une de ces droites, reporter cinq segments de même longueur, arbitraire. Sur l'autre droite, et dans l'autre demi-plan limité par (IJ), reporter un seul segment de même longueur que les précédents. Joindre enfin l'extrémité de ce segment à l'extrémité du cinquième. La droite ainsi tracée coupe la droite (IJ) en un certain point E. Ce point vérifie IE = $\frac{4}{5}$ *IJ ou* $\frac{1}{5}$ *IJ (selon le sens choisi pour effectuer la figure).*

4- Aire de la parcelle IJKL

Pour ce calcul, il est préférable de faire les calculs sur le plan (le rayon OR = 5 cm) et d'appliquer ensuite le coefficient d'agrandissement des aires qui sera ici de 300^2.

Aire de IJKL = $\frac{IK \times LJ}{2}$ On connaît LJ = AB = $\frac{4}{5}$ x 5 = 4 (en cm).

On cherche la valeur de IK. Or IK= BC. Donc on calcule BC par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC.

$BC^2 = AC^2 - AB^2$, soit $BC^2 = 100 - 16 = 84$ (en cm), donc BC = $2\sqrt{21}$.

Ainsi l'aire de IJKL sur le plan est égale à : $4\sqrt{21}\,cm^2$.

En appliquant le coefficient d'agrandissement, on trouve l'aire réelle du losange IJKL : 300 x 300 x $4\sqrt{21}\,cm^2$ = $36\sqrt{21}\,m^2$. Pour ce dernier nombre, la machine affiche 164,972725…. à 10^{-2} près par excès, et en m^2 , l'aire est donc164,98.

EXCERCICE 2 (3 points)

Remarque : Dans les deux questions qui suivent, on utilise le fait que le chiffre des unités d'un produit de deux entiers est aussi le chiffre des unités du produit de leurs chiffres des unités (considérés comme nombres). Proposons-en une justification : Supposons N et P deux entiers naturels (par exemple de trois chiffres), on a:

N = 100xc + 10xd +u et P = 100xc' + 10xd' + u'

AAinsi le produit N x P s'exprime sous la forme :

110 000cc' + 1 000(cd' + dc') + 100(cu' + dd' + uc') + 10(du' + ud') + uu'

Ainsi le chiffre des unités du produit N x P est le chiffre des unités du produit uu'.

a) En calculant le carré des nombres à un chiffre on obtient :

$0^2 = 0$ $1^2 = 1$ $2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$ $5^2 = 25$

$6^2 = 36$ $7^2 = 49$ $8^2 = 64$ $9^2 = 81$

Donc les carrés d'entiers ont pour chiffre des unités un chiffre parmi l'ensemble { 0 ; 1 ;4 ;5 ;6 ;9}.

Cette condition n'est pas suffisante puisque si l'on choisit un nombre dont le chiffre des unités est pris dans l'ensemble {0 ; 1 ;4 ;5 ;6 ;9}, ce nombre n'est pas forcément le carré d'un entier naturel.

Contre exemple : 26 n'est pas le carré d'un entier naturel et pourtant son chiffre des unités appartient à l'ensemble défini ci dessus.

Remarque : pour prouver que la condition n'est pas suffisante il suffit de donner un contre exemple et de le commenter.

b) De même, on effectue les calculs correspondant à deux entiers consécutifs:

1x2 =2 2x3 = 6 3x4 = 12 4x5 = 20 5x6 = 30

6x7= 42 7x8 = 56 8x9 = 72 9x0 = 0

On obtient ainsi que le chiffre des unités du produit de deux entiers consécutifs appartient à l'ensemble { 0 ; 2 ; 6}.

Cette condition n'est pas suffisante. En effet 52 n'est pas le produit de deux entiers consécutifs et pourtant son chiffre des unités est 2.

Remarque : *Une autre réponse moins précise sur l'ensemble des chiffres possibles aurait pu être que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair donc que son chiffre des unités pouvait appartenir à l'ensemble { 0 ; 2 ; 4 ; 6 ;8}.*

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1- Analyse des erreurs et procédures
a) Erreurs

• Multiplication incorrecte des dizaines (règle des zéros)
Il s'agit de l'erreur commise par Cindy et probablement, par Hugo. Il semble en effet que tous deux décomposent 18 en 1 dizaine et 8 unités puis calculent le produit de chaque terme par 5 (utilisation implicite de la distributivité). Mais pour Cindy, les 5 dizaines qu'elle obtient jouent le même rôle que 5 unités (parce que c'est 5 fois 1), alors que pour Hugo, il s'agit de 5 centaines. En fait, pour Hugo, l'erreur est probablement liée à la disposition spatiale : le 1 est placé avant le 8, donc le 5 (5 fois 1) doit être placé avant le 40 (5 fois 8) : il juxtapose les nombres.

• Algorithme mal maîtrisé
C'est le cas d'Elvis. Il effectue « dans sa tête » l'algorithme, mais utilise deux fois la retenue de 4 : une première fois pour l'ajouter à 5, et une seconde fois comme unité. Cela est très probablement dû à une surcharge cognitive (trop de choses à mémoriser pour utiliser ainsi l'algorithme).

• Double comptage incorrect
C'est le cas d'Iris. Si l'on considère qu'elle a obtenu son résultat sur l'ardoise par un procédé analogue à celui qu'elle explique, cela signifie qu'elle a ajouté 18 quatre fois et non cinq. C'est donc une erreur dans le double comptage : (1 ; 18) , (2 ; 18 + 18 = 36), (3 ; 36 + 18 = 54), etc. Cette erreur s'explique probablement par la difficulté à gérer à la fois ce double comptage et les additions (ses procédures additives demandent des mises en mémoire).

b) Procédures

Les procédures n'aboutissant pas, ou plutôt, aboutissant à un résultat erroné, ont déjà été étudiées dans le cadre des erreurs. On peut pour résumer, les classer en deux groupes : celles qui reposent sur la distributivité (implicite) et sur la règle des zéros (Cindy, Elvis et Hugo) et celles qui utilisent la définition de la multiplication comme addition itérée (Iris).

2- Etude de trois procédures

• Procédures utilisant l'associativité : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = a \times b \times c$
Il s'agit de la procédure utilisée par Gaëlle et que l'on peut formaliser par :
$18 \times 5 = (9 \times 2) \times 5 = 9 \times (2 \times 5) = 9 \times 10 = 90$ (règle des zéros pour terminer). La procédure utilisée par Djamel est du même type, mais avec la division au lieu de la multiplication. On peut la formaliser par :
$18 \times 5 = 18 \times (10 \div 2) = (18 \times 10) \div 2 = 180 \div 2 = (100 + 80) \div 2 =$
$100 \div 2 + 80 \div 2 = 50 + 40$ (remarquer l'intervention de la distributivité de la division sur l'addition utilisée pour terminer).

• Procédures d'addition itérée : $a \times b = \underbrace{b + b + \ldots. + b}_{\text{a fois.}}$

Il s'agit de la procédure utilisée par Bérénice, procédure que l'on peut schématiser par :

$$18 \times 5 = \underbrace{\underbrace{\underbrace{18 + 18}_{36} + \underbrace{18 + 18}_{36}}_{72} + 18}_{90}$$

Iris utilise aussi cette procédure, mais avec un succès mitigé.

• Procédures utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition ou la soustraction : $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (idem, mutatis mutandis, avec « moins »).
Il s'agit des procédures utilisées par Albert, et Fatouma (distributivité sur la soustraction) et Jules (distributivité sur l'addition). La procédure de Fatouma par exemple, se formalise par $18 \times 5 = (20 - 2) \times 5 = 20 \times 5 - 2 \times 5 = 100 - 10$; et celle de Jules par : $18 \times 5 = (10 + 8) \times 5 = 10 \times 5 + 8 \times 5 = 50 + 40$. On peut remarquer, en ce qui concerne Albert, que si sa procédure est proche de celle de Fatouma, il l'achève en interprétant 2×5 comme une addition itérée (il retranche 5, puis 5).

SECOND VOLET (8 POINTS)

Remarque : L'étudiant pourra se reporter au sujet de Lyon 1995 dont le thème est très proche de celui-ci. L'orientation des questions est différente, mais les unes éclairent les autres.

1- Intentions pédagogiques

On voit dans de nombreux manuels, des activités concernant des numérations qui ne sont pas des numérations de position. Les intentions pédagogiques associées à ces activités sont : « permettre aux élèves de maîtriser les paramètres définissant une numération de position, et la nôtre, en particulier ». Précisons :

- Maîtriser la règle des groupements ou échanges par 10.
- Maîtriser la définition, le rôle et la signification des chiffres dans notre numération.
- Maîtriser les propriétés de notre numération, relativement aux problèmes de comparaison des nombres (rôle de la longueur de l'écriture, puis de la place du « plus grand chiffre ») et des problèmes de décomposition additives (en particulier, sens de la retenue).

2- Objectifs des documents A et B

<u>Document A</u> : Ce document porte uniquement sur la conversion :
numération égyptienne → numération arabe (la nôtre).
Les objectifs sont donc :

- Associer un symbole à chaque groupement (∩ aux dizaines, par exemple).
- Repérer que les groupements en numération égyptienne se font par 10.
- Sens des chiffres (on code de la même manière quatre « anses » ou quatre crosses).
- En numération arabe, rôle de la position : le même chiffre n'a pas la même signification selon sa position ; il désigne des milliers, ou des centaines, etc…
- Rôle du zéro : l'absence d'un signe de la numération égyptienne se code par un zéro (on remarquera toutefois, que ce zéro n'est jamais intercalé).

<u>Document B</u> : Dans sa partie « je découvre », le document porte sur la conversion réciproque de la précédente.
Les objectifs sont donc identiques (remarquer l'apparition d'un zéro intercalé). Par contre, dans la partie « je m'entraîne », il s'agit tout à la fois de procéder à des additions et à des comparaisons. Les objectifs sont donc de découvrir :

- Rôle des groupements (ou échanges) dans l'addition
- Rôle de la longueur de l'écriture chiffrée dans la comparaison des nombres
- Rôle des chiffres et de leur position à partir de la gauche

Remarque : On peut noter que ce dernier objectif est conforté par la présentation des nombres dans la numération égyptienne, les unités n'étant pas systématiquement placées à droite.

3- Différences entre les activités de découverte des documents A et B.

• On l'a dit, l'une des différences repose sur le sens du codage : dans le document A, on passe de la numération égyptienne à la numération arabe ; dans le document B, on passe de la numération arabe à la numération égyptienne.

• Il y a un zéro intercalé dans le document B ; par contre, il n'y a pas de zéro terminal.

• Le champ numérique utilisé est aussi différent. Dans le document A, les nombres sont de l'ordre des centaines de mille alors que dans le document B, les exemples proposés ne dépassent pas les unités de milles.

• L'activité de l'élève est très différente. Dans le document A, l'élève est en situation de recherche, il doit retrouver à l'aide des informations le fonctionnement de la numération égyptienne. Dans le document B, les règles de fonctionnement sont indiquées ; l'élève n'a plus qu'à les appliquer. Il n'est pas en situation de recherche mais en situation d'application.

• Une dernière différence est la présence d'un exemple dans le document B, ce qui n'est pas le cas du document A. Ceci est cohérent avec la démarche proposée (recherche ou application).

4- Etude de l'activité « Je m'entraîne » du document B

a) Convertissons tout dans notre numération ; il faut comparer : 3433 + 2112 + 1225, et 3148 + 2217 + 1024, soit 6770 et 6389. Ramsès a donc marqué le plus de points.

b) Procédures :

• Une première procédure élève serait celle présentée en a) par transcription dans notre numération des scores affichés en numération égyptienne.

• Une deuxième procédure élève serait d'effectuer pour chaque joueur des regroupements des symboles de même ordre, d'effectuer si nécessaire les échanges (10 contre 1) puis de comparer les résultats par groupement d'ordre décroissant.

• Une troisième procédure serait de simplifier en barrant de part et d'autre autant de symboles de même ordre, puis de comparer ce qui resterait.

c) Compétences :

• Pour la première procédure, les compétences sont celles qui portent sur le décodage (passer de la numération égyptienne à la nôtre), puis sur l'addition et la comparaison de nombres dans notre système de numération.

• Pour la seconde procédure, l'élève doit être capable d'effectuer des échanges en base dix, d'effectuer des regroupements et de comparer des nombres à partir des groupements par ordre décroissant.

• La dernière procédure requiert les mêmes compétences que la deuxième mais est plus rapide puisque on élimine beaucoup de symboles.

d) Pertinence des procédures :

Si, comme on l'a vu, on attribue comme objectif à cette activité, le contrôle des groupements et le sens de la retenue dans l'addition, c'est bien évidemment la seconde procédure (calcul dans la numération égyptienne) qui sera la plus pertinente. Par ailleurs, cette procédure est aussi plus pertinente pour mettre en évidence les règles de comparaison (une fois l'addition effectuée, on compare le nombre de fleurs, puis le nombre de crosses, puis celui d'anses, etc…).

DIJON, NANCY-METZ, STRASBOURG, REIMS

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS) MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE N° 1 :

1) a)

À la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges : son nez de 5 cm a donc allongé de (7×3) cm. Au cours de la journée il a dit x fois la vérité et son nez a donc raccourci de (2x) cm.

On peut alors écrire l'équation (en cm) :

$5 + (7 \times 3) - 2x = 20$

d'où : $5 + 21 - 20 = 2x$

$5 + 1 = 2x \quad \boxed{x = 3}$

Pinocchio a dit aussi <u>3 fois</u> la vérité au cours de cette journée.

b)

Le nez de Pinocchio fait 5 cm de long à son réveil ; il dit 7 mensonges au cours de la journée, donc son nez s'allonge de (7×3) cm, et atteint la longueur de :

$5 + (7 \times 3) = 5 + 21 = 26$ (en cm)

Or, en fin de journée, son nez a une longueur de seulement 20 cm ; il a donc diminué d'une longueur de 6 cm.

Comme il raccourcit de 2 cm chaque fois qu'il dit une vérité et que $6 = 3 \times 2$, on peut conclure que Pinocchio a dit aussi $\boxed{\text{3 fois}}$ la vérité au cours de cette journée.

2)

On appelle x le nombre de vérités et y le nombre de mensonges que Pinocchio a dits au cours de cette journée.

La longueur du nez est à nouveau égale à 5 cm à la fin de la journée : la Fée l'a donc allongé et raccourci de la même longueur égale à (3y) cm ou (2x) cm ; on peut écrire : $3y = 2x$

Comme $3 > 2$, on peut déduire que $y < x$.

Les nombres x et y sont des entiers compris entre 1 et 15, ce qui donne déjà :

$1 \leq y < x \leq 15$

De plus 3 et 2 sont premiers entre eux, donc on peut déduire que nécessairement x est un multiple de 3 et y un multiple de 2 (ou y est pair).

Donc : $2 \leq y < x \leq 15$ et $3y \leq (2 \times 15)$ soit $y \leq 10$

D'où pour y : $\boxed{2 \leq y \leq 10 \text{ et y pair}}$

Les possibilités sont alors résumées par ce tableau :

y	10	8	6	4	2
x	15	12	9	6	3

EXERCICE N° 2 :

1) La droite (SH), perpendiculaire à la droite (CD), est donc perpendiculaire à la droite (AB), puisque ABCD étant un carré, les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles.

(SH) est donc aussi une hauteur du triangle équilatéral SAB, et par conséquent un axe de symétrie de ce triangle. (SH) est alors aussi médiatrice du segment [AB], côté du carré, et donc axe de symétrie du carré.

En définitive, (SH) est axe de symétrie de la figure et en particulier H est le milieu du côté [DC].

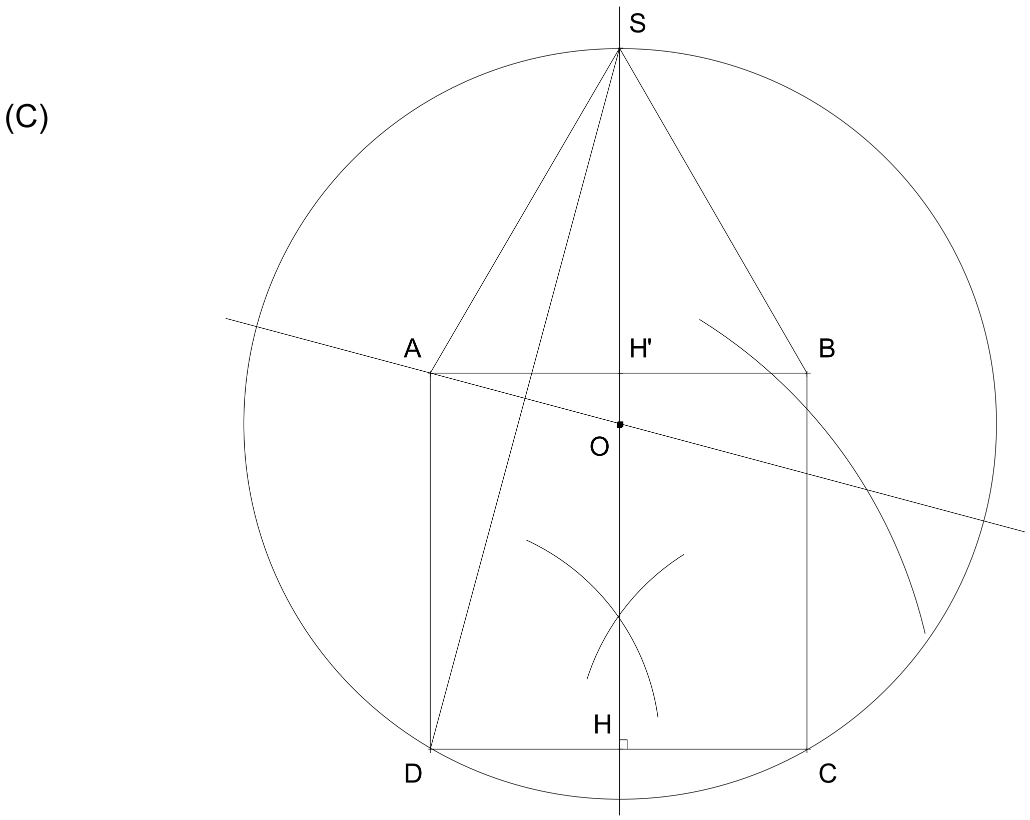
Appelons H' le point d'intersection de (SH) et de [AB] : [H'H] a pour longueur celle du côté du carré, soit a, et SH' est la longueur d'une hauteur de triangle équilatéral de longueur de côté égale à a, donc

$SH' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (le calcul se déduit du théorème de Pythagore appliqué au triangle SH'A ou SH'B).

Donc $SH = SH' + H'H = \frac{a\sqrt{3}}{2} + a = \boxed{a(\frac{2+\sqrt{3}}{2})}$

2°) Les trois points S, D et C sont sur le cercle (C), qui est donc le cercle circonscrit à ce triangle. Son centre O est le point d'intersection des trois médiatrices du triangle SDC. Il suffit d'en construire deux : par exemple la médiatrice du segment [DC] qui est la droite (SH) passant par S, et la médiatrice du segment [SD] qui passe par A (puisque A est à la même distance a de S et de D).

Il suffit alors de construire au compas un deuxième point de la médiatrice du segment [DC] (ce qui permet d'obtenir aussi le milieu H de [DC], par intersection), et un deuxième point de la médiatrice du segment [SD].



3°) Les angles $D\hat{S}O$ et $S\hat{D}A$ sont égaux car les droites (AD) et (SH) sont parallèles. (angles alternes-internes).

Le triangle ASD est isocèle en A, donc les angles $S\hat{D}A$ et $A\hat{S}D$ sont égaux.

On a donc : $A\hat{S}D = D\hat{S}O$

La droite (SD) est bissectrice de l'angle $A\hat{S}O$.

4°) La droite (OA) est la médiatrice du segment [SD] (cf. question 2) et en particulier (OA) et (SD) sont perpendiculaires. Pour le triangle SAO la droite (SD) est donc à la fois hauteur et bissectrice, c'est donc un axe de symétrie de ce triangle (qui est isocèle) et en particulier c'est aussi la médiatrice du segment [AO].
Les deux diagonales (SD) et (AO) du quadrilatère SODA sont donc médiatrices "l'une de l'autre" :

SODA est un losange.

Ses quatre côtés ont même longueur a : OS = OD = r = SA = AD = a
Le rayon r du cercle C a pour longueur la longueur a du côté du carré ABCD.

Remarque : pour montrer que SODA est un losange, il suffit de prouver que AS=SO ; mais dans ce cas, la mesure du rayon est trouvée d'emblée, elle ne se déduit pas du fait que SODA est un losange ; c'est pour respecter strictement la déduction demandée par cette question, que nous avons démontré que le quadrilatère SODA est un losange sans utiliser directement les longueurs des côtés.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

QUESTION 1

Les deux principales compétences mathématiques que cet exercice permet d'identifier sont :
Comprendre la situation décrite par l'énoncé et par les dessins : mettre en œuvre un raisonnement inductif pour poursuivre une suite dont les trois premiers éléments sont donnés.
Concevoir une procédure personnelle de dénombrement, basée sur le sens de l'addition : être capable de trouver le nombre d'éléments d'une collection en imaginant une partition convenable de celle-ci, soit en colonnes, soit sous la forme « escalier précédent + dernière colonne » (cf. les procédures des élèves C et D)

QUESTION 2

Nous envisageons 3 classes :

Les élèves C et D :

Ils ont bien répondu aux deux questions et ils ont explicité correctement leurs calculs pour la question 2.

L'élève A :

Il a bien répondu à la question 1 ; il a produit une réponse erronée à la question 2 sans expliquer sa démarche.

Les élèves B et E :

Ils n'ont pas su répondre à la question 1 : ils se sont trompés en dessinant l'escalier à 4 marches ; et ils ont bien écrit le nombre de marches de l'escalier dessiné.
Ils ont produit pour la question 2 une réponse absurde.

QUESTION 3

Élève A

On peut penser que cet élève, qui a bien fait la première question, a compris le fonctionnement de la suite, qu'il serait capable de dessiner l'escalier à 5 marches, puis à 6 marches ; mais il n'arrive pas à anticiper suffisamment et il se représente seulement l'escalier suivant, obtenu en ajoutant une colonne de 5 marches , d'où la réponse « 15 » : « 10 + 5 ».
On pourrait faire aussi l'hypothèse que cet élève n'a pas bien lu (ou compris) la question et qu'il a pensé qu'il fallait trouver le nombre de marches de l'escalier suivant.

Élèves B et E

La réponse à la première question montre que ces élèves n'ont pas compris le fonctionnement de la suite et que la question posée n'a pas de sens pour eux.
Leur stratégie pour produire quand même une réponse est probablement basée sur le repérage de relations entre les nombres déjà écrits, sans lien avec le problème posé bien sûr :
- l'élève B, ayant écrit le 9 sous le 4, à tout hasard, ajoute ces deux nombres.
Ou bien peut-être a-t-il remarqué que 9 = 3 + 6 , 3 et 6 étant les nombres figurant sous l'escalier à 3 marches ?
- l'élève E en écrivant le 8 sous le 4 a constaté que $8 = 2 \times 4$; il a vérifié la même relation pour $6 = 2 \times 3$ il en déduit que pour 6 marches il faut 6×2 briques ,d'où la réponse 12 ; il fait comme si le nombre de briques était proportionnel au nombre de marches ; et l'on peut penser qu'il s'est trompé, a posteriori, en écrivant le 6×3 (une erreur de calcul pour 6×3 est moins probable).

Élève C

Il considère l'escalier à 6 marches comme un objet isolé et il le structure mentalement en colonnes, qui ont respectivement 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6 briques ; il fait donc la somme 1+2+3+4+5+6 pour trouver le nombre total de briques.

Elève D

Il considère la suite des escaliers et il voit que l'escalier à n marches se déduit de celui à (n – 1) marches en ajoutant à droite une colonne de n briques. En partant de l'escalier à 4 marches, on ajoute donc 5 briques , puis 6 briques pour avoir un escalier à 6 marches. D'où le calcul 10+5+6.

SECOND VOLET (8 POINTS)

QUESTION 1

Cette séquence porte sur des déplacements sur quadrillage : description orale puis mise en place d'un codage écrit.
La référence aux Instructions Officielles (I.O.) permet de situer cette séquence au cycle 1 ou au cycle 2 ; on trouve dans les textes du cycle 1 :

> « vocabulaire lié aux déplacements » et « quadrillages : repérage des nœuds ou des cases, déplacement » et aussi « se déplacer selon des consignes strictes » ;

et dans ceux du cycle 2 :

> « se situer et se repérer dans l'espace ;
> coder et décoder un déplacement »

Cependant la séquence décrite ici, n'est guère vraisemblable en CP ; et le type de codage retenu (« vers les rideaux » plutôt que « vers la gauche ») relève plus de la maternelle : nous la situons donc plutôt en grande section de maternelle.

QUESTION 2

Dans tous les cas, nous notons qu'il s'agit de déplacements sur quadrillage.

Séance 1

Mise en place des règles : déplacements « par le côté », cases de départ et d'arrivée.

Séance 4

Mise en place d'un codage oral pour prescrire des déplacements, codage se référant à des repères fixes de la salle.

Séance 5

Utilisation du codage oral mis en place et représentation du déplacement.

Séance 7

Élaboration et utilisation d'un code écrit.

QUESTION 3

La maîtresse demande à être guidée pour faire comprendre aux élèves qu'ils doivent seulement exécuter les ordres donnés et les obliger ainsi à être plus précis.
En effet, puisque l'élève qui se déplace voit la case où il doit arriver, il « interprète les ordres qu'il reçoit », donc même si ces ordres sont vagues (par exemple « tourne » sans dire dans quel sens), l'élève va arriver quand même à la bonne case.
La maîtresse, elle, en s'en tenant strictement aux ordres qu'elle reçoit, va obliger les élèves à être plus précis.
En même temps elle montre « à quoi on joue » : il faut « faire semblant » de ne pas voir la case d'arrivée et exécuter seulement les ordres ; elle simule ainsi, avec la complicité toute scolaire des élèves, une situation de communication qui donnerait du sens au codage visé (voir l'exemple 2 de la QUESTION 5).

QUESTION 4

Cette réponse est plus complète que celle attendue d'un candidat au concours. Nous en avons souligné les éléments essentiels.

Information préliminaire

La notion de variable didactique est utilisée dans l'analyse d'une situation d'apprentissage basée sur la résolution d'un problème ; il s'agit de paramètres de cette situation, sur lesquels l'enseignant peut agir, et qui sont susceptibles d'entraîner des modifications dans les procédures de résolution, ou dans la hiérarchie de ces procédures. Pour montrer qu'un paramètre est une variable didactique, il faut donc définir le problème posé, les procédures de résolution envisageables, et étudier l'influence du paramètre sur le choix de la procédure de résolution.

Ici, il faut d'abord préciser la procédure visée par la maîtresse pour pouvoir dégager les variables didactiques sur lesquelles elle a agi pour privilégier cette procédure

Nous considérerons ici que le problème posé est de mettre au point un langage oral, ou un codage écrit, pour faire exécuter par un élève un déplacement sur un quadrillage (déplacement de cet élève lui-même, ou déplacement d'un objet).

Le déroulement de la séance 4 montre que la procédure de résolution visée par la maîtresse est l'utilisation de repères fixes dans la salle où est dessiné le quadrillage (« vers les rideaux » etc.).

Les autres procédures envisageables sont :

- celle liée à l'orientation de l'élève (ou de l'objet orienté) qui se déplace :

  « avance », « recule » , « pivote à droite », « pivote à gauche » (cf. tortue logo).

- l'utilisation de l'orientation du quadrillage : codage oral : « vers le haut » (ou vers l'avant »), « vers le bas » (ou « vers l'arrière »), « vers la gauche », « vers la droite » ; et codage écrit par des flèches.

1) Il est clair que pour rendre possible l'utilisation des repères liés à la salle, la maîtresse a dû choisir un quadrillage fixe dans la salle, et avec ses côtés parallèles aux bords de la salle.

La première variable didactique sur laquelle la maîtresse a agi est donc l'orientation du quadrillage dans la classe.

2) Une deuxième variable peut être la taille du quadrillage : sur un quadrillage tracé sur une feuille de cahier, l'utilisation des repères de la classe ne serait pas impossible, mais serait beaucoup moins pertinente que l'utilisation de l'orientation sur la feuille. Le choix d'un grand quadrillage contribue donc à aller vers les objectifs fixés.

Autres réponses possibles :

3) Le fait d'interdire de parler oblige les élèves à passer d'un codage oral à un codage écrit.

4) Le choix de l'objet qui se déplace : on peut le considérer en effet comme une variable didactique car si cet objet est orienté (comme ici les élèves) on peut

envisager un codage lié à cette orientation (type tortue logo) ; cependant, ce n'est pas une bonne réponse à la question posée car justement, en choisissant de faire déplacer les élèves, la maîtresse a provoqué l'autre procédure, « à gauche, à droite » qui n'est pas la procédure visée.

QUESTION 5

Nous donnons deux exemples : un seul était demandé au concours.

EXEMPLE 1

Objectifs
- utiliser le codage mis au point dans la séance 7.
- être capable de coder d'emblée l'ensemble d'un parcours.

Déroulement : les cases rouges et vertes sont placées sur le quadrillage ;
En atelier : plusieurs couples de deux enfants viennent coder par écrit la suite des déplacements nécessaires ;
En collectif : chaque codage est recopié au tableau par la maîtresse et il est testé par un élève qui se déplace sur le quadrillage sous le contrôle du groupe.
Remarque : on peut éventuellement introduire des cases interdites, constituant ainsi une sorte de labyrinthe rendant la situation plus problématique.

EXEMPLE 2 :

Objectif : donner du sens au codage introduit en s'en servant dans une véritable situation de communication.

Matériel : un quadrillage de 25 grandes cases dessiné au sol ; deux jeux identiques de 25 images (memory) ; un des jeux est posé sur le quadrillage, une image par case, face visible. Une case de départ est choisie.
Jeu pour deux élèves A et B : A tire au sort une carte, sans que B ne la voie.
Le but pour le couple (A, B) est d'obtenir la paire des deux cartes identiques ; B se place sur la case de départ, et A doit le guider pour le conduire sur la case où il ramassera « la bonne carte ». Validation en confrontant les deux cartes.
On peut envisager une situation avec un guidage oral, et une autre avec un codage écrit.
Organisation : en atelier, chaque couple joue successivement sous le contrôle des autres, puis on inverse les rôles.

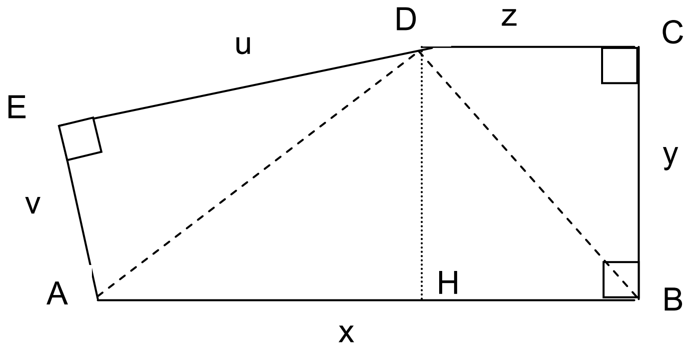
Remarque : la situation est bien différente de celle décrite dans le document ; ici, l'élève B qui reçoit les ordres de l'élève A ne sait pas sur quelle case il doit arriver à la fin ; le codage est utilisé ici comme un outil pour résoudre un vrai problème de communication. La maîtresse n'a pas besoin d'intervenir sans cesse puisque les élèves vont pouvoir se rendre compte par eux-mêmes de l'efficacité de leur codage.

GRENOBLE, LYON

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

PROBLEME 1 (4 points)



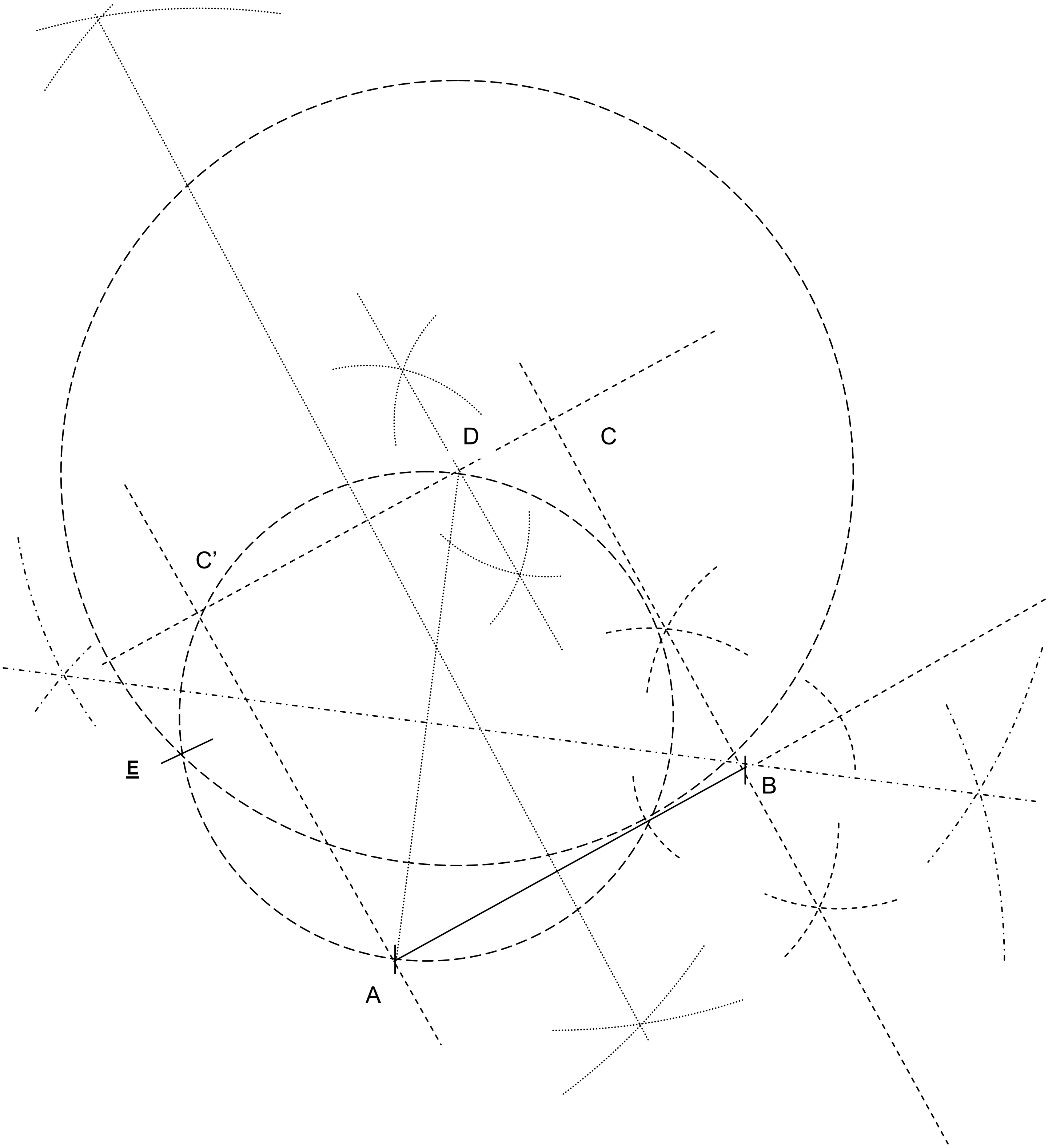
1- Le pentagone peut être considéré comme la réunion disjointe des triangles ABD, BCD et ADE. Les triangles DBC et ADE sont rectangles et donc d'aire respectives $\frac{zy}{2}$ et $\frac{uv}{2}$. Le triangle ADB a pour base AB et pour hauteur relative DH. Son aire est donc $\frac{xy}{2}$. L'aire totale du pentagone est donc bien $\frac{xy+yz+uv}{2}$.

Remarque : On peut aussi considérer le pentagone comme la réunion des triangles ABC, ACD et ADE. L'aire des triangles ABC et ADE est évidente ; quant à ACD, on peut le considérer avec CD comme base, la hauteur relative étant alors isométrique à BC. D'où le résultat.

2- Cas où AB = x, $x = y = u$ et $z = \frac{x}{4}$

a) On trouvera la construction page suivante. Donnons quelques indications : on a construit un carré ABCC' de côté AB = x (construction de l'angle droit en B par la méthode de la médiatrice). Les points A, B et C sont trois sommets de ce carré ; Le point D est situé sur [CC'] tel que CD = $\frac{1}{4}$ CC' (recherche de la moitié de la moitié de la longueur de [CC'] par les médiatrices). Pour la construction du point E, voir la question suivante.

b) Analysons la figure constituée par le triangle ADE. Ce triangle est rectangle, par suite, le point E appartient au cercle de diamètre [AD]. D'autre part, DE = AB = x, donc le point E appartient au cercle de centre D et de rayon AB. Le point E est donc situé à l'intersection de ces deux courbes. Or, ces deux courbes ont deux points communs situés de part et d'autre de (AD), un seul de ces points est donc situé dans le demi-plan qui ne contient pas B et vérifie donc la contrainte de convexité du pentagone. C'est le point E cherché. D'où la construction ci-dessous :



> *Remarque :* On peut aussi observer que les triangles ADE et ADH sont isométriques (tous deux rectangles, même hypoténuse, et deux côtés isométriques), par suite EA = AH, et ED = x, ce qui permet de déterminer et construire le point E par une autre méthode.

Pour rendre la figure plus lisible, on n'a pas achevé le pentagone.
c) En se reportant à la question 1, on voit que le seul problème est le calcul de v. Or, les triangles ADE et ADH sont isométriques (rectangles, hypoténuse commune et un côté isométrique), donc v = AE = AH = x – z = 3 (pour x = 4), d'où l'aire du pentagone : $\frac{4\times4+4\times1+4\times3}{2}$ = 16 (en cm^2).

PROBLEME 2 (2 points)
Remarque : La division euclidienne fait correspondre à un couple (a ; b) l'unique couple (q ; r), défini par a = b$\times$ q + r et 0 $\leq$ r < b. Un résultat est donc constitué du quotient ***et*** *du reste ; Il est donc erroné dès que l'un des deux est faux.*
• Résultat n° 1 : L'ordre de grandeur du quotient n'est pas respecté : 400 $\times$ 12 = 4800.
• Résultat n° 2 : Le reste est supérieur au diviseur (18 > 12) ce qui est impossible.
• Résultat n° 3 : Le calcul effectué sur les unités ne correspond pas à l'égalité de la division euclidienne. Cette égalité devrait être : 40 626 = 3 382 $\times$ 12 + 6, or le chiffre des unités du terme de droite est 0 (2 $\times$ 2 + 6 = 10). L'égalité est donc impossible
• Résultat n° 4 : Si le reste était nul, le nombre serait divisible par 4. Ce n'est pas le cas car le nombre formé par les deux derniers chiffres, 26, n'est pas divisible par 4 (règle de divisibilité par 4).

PROBLEME 3 (2 Points)
1- Il s'agit effectivement d'une réduction de 20% ; En effet, appliquer une telle réduction, sur un nombre, revient à multiplier celui-ci par 0,8 (1 – $\frac{20}{100}$) . Or, 9 $\times$ 0,8 = 7,2. Le prix d'une pelote est donc bien réduit de 20%.
2- En achetant 15 pelotes à 7,20F, la cliente va payer 15 $\times$ 7,20 = 108 (francs). Si elle achète 14 pelotes à 9F, elle doit payer 9 $\times$ 14 = 126 (francs) Elle va donc économiser 18F, soit, par rapport au prix normal : $\frac{18}{126}$. Or, $\frac{18}{126} \approx 0,14285714$.
L'économie réalisée sera donc de 14,3% (arrondi).
3- Le commerçant achète chaque pelote 7,20F, et il la revend 9F, faisant donc un bénéfice de 1,80F. Son bénéfice en % est donc : $\frac{1,80}{7,20}\times100$ = 25%.
Remarque : On peut aussi raisonner sur les coefficients de proportionnalité et remarquer que l'inverse de 0,8 (coefficient de réduction) est 1,25 (coefficient d'augmentation). Donc, si à l'achat, le commerçant a obtenu une réduction de 20%, en la vendant au prix initial, il fait un bénéfice de 25%.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Le problème proposé est un problème de recherche de quatrième proportionnelle que l'on peut schématiser par le tableau suivant :

Poids en grammes	Nombre de carrés
200	40
80	n

Il faut tout de même remarquer que si l'une des variables de ce tableau est imposée par le texte : le poids en grammes, l'autre variable est laissée au choix du lecteur, et l'on peut tout aussi bien choisir le nombre de carrés de chocolat, que le nombre de colonnes de chocolat, ou le nombre de lignes. Bien entendu, chacune de ces variables n'a pas la même pertinence pour la résolution du problème.

1- Description des procédures :

A- Procédures utilisant le nombre de carrés de chocolat

a) Procédure utilisant les propriétés de linéarité :

200g pour 40 carrés, donc
100g pour 20 carrés et aussi,
20g pour 4 carrés.

D'où, pour obtenir le nombre de carrés, deux méthodes :

- Soit $80 = 100 - 20$ et donc $20 - 4$ pour les carrés
- Soit $80 = 4 \times 20$ et donc 4×4 pour les carrés.

Les propriétés mathématiques utilisées sont celles associées à la linéarité, multiplicative et additive, se formalisant respectivement par $f(k.x) = k.f(x)$ et $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ou $f(x - y) = f(x) - f(y)$.

b) Procédure utilisant « le passage à l'unité » :

Si 40 carrés pèsent 200g, un carré pèse 5g, et comme $80 = 5 \times 16$, il faut 16 carrés. Cette procédure utilise à nouveau les propriétés de linéarité, mais d'une manière automatique, en cherchant l'image de l'unité. On remarquera toutefois que la correspondance utilisée va du nombre de carrés vers le poids, et est réciproque de celle utilisée en a) (Il s'agit de l'influence des variables didactiques : si 40 avait été divisible par 200, on aurait pu utiliser la même correspondance). Cette procédure est utilisable par un élève de CM2.

c) Procédure utilisant le coefficient de proportionnalité :

$40 = 200 \div 5$, donc pour 80g, il faut $80 \div 5 = 16$ carrés. Cette procédure repose sur le fait que la correspondance poids $\rightarrow$ carrés est une fonction linéaire, définie, par exemple, par $f(x) = k.x$, avec $k = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$. Bien entendu, cette procédure, utilisable par un élève de CM2, fera plutôt appel à une division par 5 qu'à une multiplication par $\frac{1}{5}$. L'élève peut aussi déterminer ce coefficient en complétant le tableau :

Poids en grammes	Nombre de carrés
200	40
80	n
5	1

$\times 5$

d) Procédure experte de « la règle de trois » :

Il s'agit d'une procédure non disponible en CM2 et qui utilise le passage à l'unité sur le poids, sans le faire apparaître : pour 200g, on a 40 carrés, donc pour 1g, 200 fois moins, et pour 80g, 80 fois plus. Ce qui se traduira par n = $\dfrac{40 \times 80}{200}$ = 16

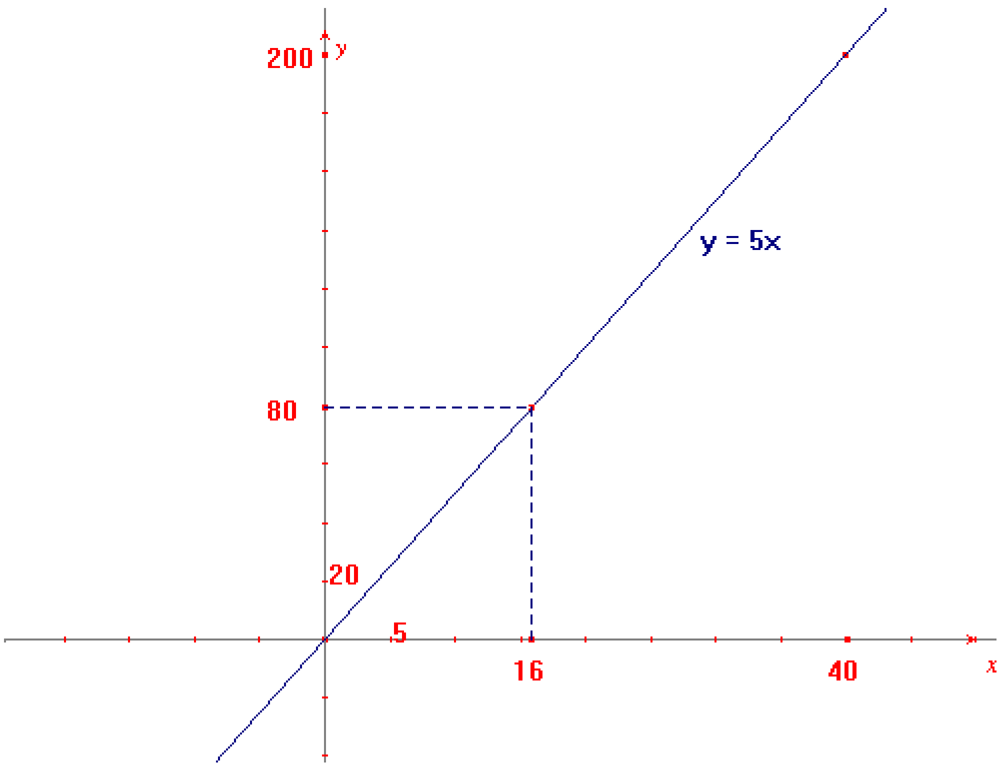
e) Procédure experte du produit en croix :

n est solution de l'équation : n $\times$ 200 = 40 $\times$ 80, d'où le calcul de n. Cette procédure utilise, pour une fonction linéaire (Cf. supra, c), la relation y.f(x) = x.f(y). On a plutôt l'habitude de lier cette propriété à celle de l'égalité du produit des extrêmes et des moyens dans une égalité de rapports

($\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ équivaut à : $a \times d = b \times c$).

f) Procédure utilisant un graphique :

La relation étudiée « poids en grammes en fonction du nombre de carrés » correspond à la fonction linéaire $x \rightarrow 5x$ qui a pour représentation graphique la droite d'équation y = 5x (poids en ordonnée, nombre de carrés en abscisse). Les points dont les coordonnées correspondent à des nombres du tableau sont donc situés sur cette droite. On peut donc lire sur le graphique le nombre de carrés correspondant à 80g.



On utilise le fait que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine.
Cette procédure peut être utilisée par un élève de CM2.

B- Procédures prenant comme variable « le nombre de colonnes »
Le problème est alors schématisé par le tableau :

Poids en grammes	Nombre de colonnes
200	10
80	C

Les procédures que nous avons envisagées ci-dessus sont à nouveau possibles, même pour des élèves de CM2, le poids d'une colonne, 20g, restant un nombre entier, et le coefficient de proportionnalité (diviser par 20) restant simple.

C- Procédures prenant comme variable « le nombre de lignes »
Le problème est alors schématisé par le tableau :

Poids en grammes	Nombre de lignes
200	4
80	L

On voit que si les procédures précédentes sont encore possibles, elles ne sont plus utilisables par un élève de CM2, car leur mise en œuvre suppose une maîtrise des fractions et/ou l'utilisation d'une double proportionnalité (dans une ligne, le poids est proportionnel au nombre de carrés) difficilement gérables par un élève de ce niveau.

2- Analyse des productions

Bilel : Il utilise une procédure de passage par l'unité, en cherchant combien pèse un carré, puis combien il en faut pour faire 80g. Son résultat est correct. On peut toutefois penser qu'il a obtenu 80 par addition réitérée (5 + 5 + 5 + …) et non par multiplication (5×16). Son dessin semble significatif à cet égard, puisque les carreaux sont marqués un à un.
D'autre part, il n'utilise pas la multiplication (ou plutôt la division) dans la recherche de ce que vaut un carré, mais procède par tâtonnements. Son résultat est correct.

Fayçal : Il utilise une procédure de linéarité, avec comme variable les colonnes (qu'il appelle rangées). Son résultat est incorrect car il s'est trompé dans le « calcul » du poids d'une rangée (il utilise 10g au lieu de 20g). Peut-être a-t-il compté 10 rangées pour 100g, en confondant la tablette entière et sa moitié.

Julie : Elle essaie de mettre en place une procédure de linéarité multiplicative : elle cherche le rapport pour passer de 200 à 80. Elle trouve 2,5 (résultat juste de sa division). Elle interprète mal son résultat puisqu'elle le prend comme le nombre de colonnes de chocolat nécessaire (Cf. sa représentation géométrique), et non comme un rapport lié aux propriétés de linéarité multiplicatives faisant passer de 40 carrés de la plaque au nombre de carrés cherchés (il fallait diviser 40 par 2,5).

Remarque : Les deux multiplications posées par l'élève, sont, semble-t-il, ses calculs intermédiaires pour effectuer sa division. On notera en particulier, la multiplication de 80 par 5, où elle multiplie 80 par 4, puis ajoute 80 (distributivité).

SECOND VOLET (8 POINTS)

1- Etude de l'activité de grande section

1.1 Etude des procédures

a) Procédures individuelles
On désigne ainsi les procédures où chaque enfant se sert sans tenir compte de son vis-à-vis : c'est le cas du groupe 1. La distribution est effectuée un à un.

b) Procédures individuelles dépendantes
On désigne ainsi les procédures dans lesquelles chaque enfant se sert sans tenir compte de son vis à vis, mais où le duo compare les collections entre elles. Il s'agit des groupes 6 et 7.
Pour ces deux groupes, le moyen de contrôle de l'équipotence des collections est spatial (représentation dans l'espace d'une correspondance paquets à paquets : paquets de deux pour le groupe 7, paquets de trois pour le groupe 6). La contrainte de place amène le groupe 7 à substituer à cette représentation, l'égalité des hauteurs.

c) Procédures duelles synchrones
Nous désignons ainsi les procédures où les enfants s'assurent de l'équipotence des collections en utilisant la synchronisation de leurs gestes. Il s'agit des groupes 2 (placement des objets), 3 et 5 (pour le comptage).

d) Procédures duelles alternées
On désigne ainsi les procédures où les enfants se servent à tour de rôle. Il s'agit des groupes 2, 4 et 5. Les groupes 2 et 5 effectuent une distribution un à un, alors que le groupe 4 effectue une distribution par paquets de 2. Il faut noter l'erreur du groupe 4, qui n'a pas de correspondant pour son dernier paquet de 2.

1.2- Moyens de contrôle

Les enfants s'assurent de l'équipotence des collections obtenues lors du partage soit par une représentation temporelle (simultanéité ou alternance), soit par une représentation spatiale (paquets ou objets mis face à face).
Seul le groupe 1 n'utilise aucune de ces représentations et n'a ainsi aucun moyen de contrôle.
En outre, le groupe 5 s'assure de l'équipotence par comptage (simultané).
En revanche, même si le groupe 4 utilise comme moyen de contrôle la représentation spatiale des sous collections, ce moyen ne semble pas avoir de sens pour lui, puisqu'il ne l'utilise pas pour « interroger » son travail.

1.3- Variables didactiques

• Une première variable didactique est, bien entendu, la taille du nombre. Un nombre d'objets trop petit (une dizaine) permettrait un partage « à l'œil » (subitizing), alors qu'un nombre d'objets trop grand (une centaine) ne permet pas une représentation spatiale simple de la correspondance, comme on le voit avec le groupe 7, seul groupe a avoir eu une soixantaine d'objets.

• Une deuxième variable didactique est la taille des objets qui permet ou non une représentation spatiale de la correspondance. On en voit encore une illustration avec le groupe 7 : c'est parce que la taille des godets est trop grande (relativement à leur nombre) que les enfants sont obligés d'avoir recours à l'empilement.

• Une troisième variable didactique, non négligeable, est la nature du nombre d'objets (bien entendu, nombre pair). Si ce nombre n'est ni multiple de 3, ni multiple de 4, ni de 5, les procédures de répartition par paquets peuvent être mises en défaut comme le montre l'exemple du groupe 4.

2- Etude de la séance de CP.

2.1- Procédures de résolution des exercices

a) Les élèves peuvent commencer par compléter chaque boîte à 5 (maximum présent), puis distribuer ce qu'il reste de jetons équitablement entre les boîtes.

b) Les élèves peuvent commencer par sortir les jetons des boîtes, puis effectuer avec la totalité des jetons, un partage équitable, et enfin, remettre dans les boîtes ce qu'il faut pour retrouver l'état initial.

Remarque : Les deux procédures correspondent aux deux procédures « expertes » de résolution mathématique du problème : Il s'agit de trouver x, y , z et t tels que
$x + y + z + t = 14$ et $x + 3 = y + 4 = z + 5 = t + 2$.
1^ère^ solution (1^ère^ procédure) $z = x – 2 = y – 1 = t – 3$, donc $4.z = 14 – 6 = 8$ et $z = 8 \div 4 = 2$, etc.
2^ème^ solution (2^ème^ procédure) On pose $U = x + 3 =$ etc. donc $4.U = 14 + 3 + 4 + 5 + 2 = 28$, donc $U = 28 \div 4 = 7$ etc.

2.2- Analyse des moments de travail en groupes et collectif

D'après le guide du maître, les phases en groupe sont réservées aux phases de recherche, alors que les phases collectives sont destinées aux moments de validation (organisation d'un débat argumentatif entre les élèves visant à prouver l'exactitude du résultat obtenu), ainsi qu'à l'analyse des procédures utilisées. Ce choix est tout à fait justifié, la communication intra-groupe étant plus pertinente pour la mise au point d'une stratégie, et la communication inter-groupe pour le débat et l'analyse des procédures.

2.3 Etude des exercices de CP.

a) Procédures pour le premier exercice
• Procédure schématisée
L'élève peut réaliser, à l'aide de traits, par exemple, une correspondance paquets à paquets entre les personnes d'une part et les places (paquets de deux) ou les wagons (paquets de 6) d'autre part. La disposition des personnes sur le quai ne s'oppose pas, bien au contraire, à une telle procédure.

• Procédure numérique : L'élève peut compter le nombre de places disponibles (24) et le nombre de personnes (23) et conclure car 23 est plus petit que 24.

b) Procédures pour le deuxième exercice
Il faut noter que l'exercice ne parle pas de partage équitable, et que seule la question « chaque enfant peut-il recevoir… » fait référence, implicitement, a un tel partage. On peut toutefois penser que la leçon qui a précédé a établi un contrat didactique que l'élève essaiera de respecter.
• Procédure paquets à paquets
L'élève distribue un paquet de N images à chaque enfant, à tour de rôle, puis, recommence, s'il lui en reste. La distribution effectuée, il compte ce que chacun a. S'il choisit N = 3, par exemple, il lui restera 2 images, et il pourra donner ces deux-là à Annie seule, ou une à Annie et une à Paul…
• Procédure un à un
L'élève distribue (en dessinant) une image à chaque enfant, jusqu'à épuisement, de son lot, puis compte ce que chacun a.

c) Pertinence par rapport aux objectifs visés
Bien que le guide du maître ne parle pas des objectifs de la séquence, on peut penser que ceux-ci sont :

- Mettre en place des procédures (non numériques) de partage équitable.
- Différencier un partage équitable d'un partage non équitable.
- Traduire une partition à l'aide d'une écriture additive.

Il est alors clair, en se référant aux procédures que nous avons vues pour le premier exercice, que celui-ci n'est pas du tout pertinent pour ces objectifs. En ce qui concerne le deuxième exercice, il n'est pertinent pour le premier objectif qu'au prix du respect du contrat didactique (implicite). Il est par contre pertinent pour le dernier objectif que nous avons formulé.

3- Comparaison des situations

	GS	**CP**
Problèmes	• Répartition d'une collection (entre 30 et 60) en deux parts. • Représentation spatiale de la solution	• Répartition d'une collection, (au plus 30 éléments) en quatre parts. • Ecritures additives. • Calculs additifs.
Compétences	Savoir vérifier l'équipotence de collections : correspondance terme à terme ou paquets à paquets.	• Savoir dénombrer une collection (petite). • Savoir traduire une partition à l'aide d'une écriture additive. • Savoir réduire une écriture additive. • Utiliser cette réduction pour vérifier et expliquer une situation.
Contrôle	• Disposition spatiale • Dénombrement	• Calculs additifs

En résumé :
Eléments communs aux deux situations :

- Objectifs des séances : partage équitable.
- Manipulation d'objets déplaçables.

Eléments différents

- La taille des collections (de 30 à 60 en GS et moins de 30 en CP).
- Le nombre de parts (2 en GS et 4 en CP).
- Les moyens de contrôle.

Ecritures mathématiques en CP
Disposition spatiale en GS

GUADELOUPE-GUYANE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

Méthode 1 :
Soit x et y les mesures en cm des longueurs des côtés

$\frac{x}{6} = \frac{y}{7}$ soit $6y = 7x$

x et y sont des multiples de 19

Si n désigne le nombre de carreaux sur la largeur et n' le nombre de carreaux sur la longueur. On sait d'après l'énoncé que n et n' sont deux entiers

Avec $n \times n' = 2688$ et $x = 19n$ et $y = 19n'$

donc $x\,y = 19^2 \times n \times n' = 19^2 \times 2688$ donc $7x^2 = 6 \times 19^2 \times 2688$
$7x^2 = 6 \times 19^2 \times 7 \times 384$ donc $x^2 = 6 \times 19^2 \times 384 = 19^2 \times 6 \times 6 \times 64$

$x = 19 \times 48$ et $y = 19 \times 56$ $\boxed{x = 912 \text{ cm} \quad \text{et} \quad y = 1064 \text{ cm}}$

Méthode 2 :
Les mesures en cm du rectangle sont 7k et 6k (k, nombre réel)
L'aire de la salle en cm^2 est donc $7k \times 6k = 42\,k^2$

D'après l'énoncé on sait que les dimensions de la salle sont des entiers (donc k entier) et son aire en cm^2 est : 2688×19^2

Il vient $42\,k^2 = 2688 \times 19^2 = 64 \times 42 \times 19^2$ donc $k^2 = 8^2 \times 19^2$
D'où $k = 8 \times 19$

donc les mesures en cm du rectangle sont : $7 \times 8 \times 19$ et $6 \times 8 \times 19$

soit $\boxed{1064 \text{ cm et } 912 \text{ cm}}$

EXERCICE 2

Le raisonnement se fait à partir de la figure donnée en annexe.

Méthode 1 :

<u>Outils mathématiques</u> : les aires, en particulier : aire du triangle = $\frac{1}{2}$ *base* $\times$ *hauteur et un résultat que l'on établit et utilise de façon récurrente : une médiane partage tout triangle en deux triangles de même aire.*
<u>Figure</u> : on se sert uniquement de la hauteur (GH) dans la figure fournie.

a) aire AGB' = $\frac{1}{2}$ AB' $\times$ GH et aire GB'C = $\frac{1}{2}$ B'C $\times$ GH

Comme B' est milieu de [AC] on a AB' = B'C donc aire AGB' = aire GB'C

On a démontré ainsi qu'une médiane (GB') partage le triangle AGC en deux triangles de même aire. Ceci est valable quel que soit le triangle et sa médiane. On appellera ce résultat « propriété de la médiane ».

<u>On peut donc ainsi affirmer d'après cette propriété de la médiane que</u>
aire AGC' = aire C'GB et aire BGA' = aire A'GC

b) aire BGA = aire ABB' – aire AGB'
aire BGC = aire BB'C – aire B'GC
Or aire ABB' = aire BB'C d'après la propriété de la médiane (BB') dans le triangle ABC et aire AGB' = aire B'GC déjà vu d'après la propriété de la médiane.
On a donc : aire BGA = aire BGC

On démontre de même par différence et avec la propriété de la médiane que
aire BGC = aire AGC d'où l'égalité des trois aires.

Méthode 2

<u>Outils mathématiques</u> : On rajoute à ce qui précède la connaissance de la place du centre de gravité sur une médiane : AG' = $\frac{1}{3}$ *AA'.*
<u>Figure</u> : on se sert des deux hauteurs (GH) et (BL) dans la figure fournie.

a) identique à la méthode 1.

b) aire ABA' = $\frac{1}{2}$ AA' $\times$ BL et aire GBA' = $\frac{1}{2}$ GA' $\times$ BL

comme GA' = $\frac{1}{3}$ AA' aire GBA' = $\frac{1}{3}$ aire ABA' = $\frac{1}{6}$ aire ABC

On démontrerait de même en traçant la hauteur issue de C dans le triangle CGB' que aire CGB' = $\frac{1}{6}$ aire ABC.

On démontrerait de même en traçant la hauteur issue de A dans le triangle AC'G que aire AC'G = $\frac{1}{6}$ aire ABC.

D'où les six triangles de même aire :
aire GBA' = aire A'GC = aire CGB'

aire CGB' = aire AGB' aire AC4G = aire BC'G = $\frac{1}{6}$ aire ABC

Méthode 3 :
Outils mathématiques : On rajoute à ce qui précède le théorème de Thalès.
Figure : on ne se sert plus des deux hauteur (GH) et (BL) dans la figure fournie mais on trace deux autres hauteurs.

On trace la hauteur (AK) issue de A dans le triangle ABA' et la hauteur(GK') issue de G dans le triangle BGC.

(GK') // (AK) et A'G = $\frac{1}{3}$ A'A donc GK' = $\frac{1}{3}$ AK

aire BGA' = $\frac{1}{2}$ GK $\times$ BA' et aire ABA' = $\frac{1}{2}$ AK' $\times$ BA'

donc aire BGA' = $\frac{1}{3}$ aire ABA'= $\frac{1}{6}$ aire ABC

et de même pour les six triangles.

EXERCICE 3

a) 6 minutes = $\frac{6}{60}$ heure $= \frac{1}{10}$ heure et 4 minutes = $\frac{4}{60}$ heure $= \frac{2}{30}$ heure

	Vitesse moyenne	Durée du parcours	Distance parcourue
Premier coureur	v + 7,5	$t - \frac{1}{10}$	$(v + 7,5)(t - \frac{1}{10})$
Deuxième coureur	v	t	v t
Troisième coureur	v - 4,5	$t + \frac{2}{30}$	$(v - 4,5)(t + \frac{2}{30})$

b) Les trois coureurs ont parcouru la même distance donc :

$v\,t + 7,5\,t - \frac{1}{10}\,v - 0,75 = v\,t = v\,t - 4,5t + \frac{2}{30}\,v - 0,3$

d'où il vient les deux équations :

$7,5\,t - \frac{1}{10}\,v - 0,75 = 0$ ou encore $75\,t - v - 7,5 = 0$ (1)

$-4,5t + \frac{2}{30}\,v - 0,3 = 0$ ou encore $-135t + 2v - 9 = 0$ (2)

$150\,t - 2v - 15 = 0$ (1)

$-135\,t + 2v - 9 = 0$ (2)

Ce qui donne par addition 15 t = 24 soit $t = \frac{24}{15}$ heure = 1heure 36 minutes

D'où $\boxed{\text{la vitesse du deuxième coureur}}$:

$v = 75 \times \frac{24}{15} - 7,5 = 120 - 7,5 = \boxed{112,5 \text{ km/h}}$

$\boxed{\text{Vitesse du premier coureur}}$ 112,5 + 7,5 = $\boxed{120 \text{ km/h}}$

$\boxed{\text{Vitesse du troisième coureur}}$ 112,5 – 4,5 = $\boxed{108 \text{ km/h}}$

$\boxed{\text{Durée du parcours du deuxième coureur}}$: $\frac{24}{15}$ heure = $\boxed{\text{1heure 36 minutes}}$

$\boxed{\text{Durée du parcours du premier coureur}}$: $\frac{24}{15} - \frac{1}{10} = \frac{45}{30}$ heure = $\boxed{\text{1heure 30 minutes}}$

$\boxed{\text{Durée du parcours du troisième coureur}}$: $\frac{24}{15} + \frac{2}{30} = \frac{50}{30}$ heure = $\boxed{\text{1heure 40 minutes}}$

$\boxed{\text{Distance parcourue par les trois coureurs}}$: $120 \times 1,5 = \boxed{180 \text{ km}}$

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
TRAVAUX D'ELEVES.

La procédure experte pour ce genre de problème est algébrique et consiste en la résolution d'un système d'équations (une équation pour chaque information de l'énoncé).
Soit b le prix du biscuit et c le prix du croissant, en francs :
3b + c = 26 (1)
2b + c = 19 (2)
ce qui donne par différence b = 26-19 = 7

Ne possédant pas cet outil, les élèves vont :
- soit devoir faire des hypothèses et les tester avec les deux contraintes,
- soit recourir à un substitut d'algèbre par un dessin plus ou moins schématique.

Jimmy :

<u>Procédure non valide</u>

Il fait l'hypothèse que le biscuit au chocolat et le croissant (dont il unifie le nom en « petit pain ») coûtent le même prix : 5F. Il utilise la première information en deux temps : achat de 4 gâteaux, soit 20F Utilisant la première information de l'énoncé : avec 20F il manque 6F, il déduit que le croissant est plus cher et vaut 5 + 6 = 11F
Il s'arrête là et n'utilise pas la deuxième information donnée par l'énoncé.

Jordan :

Procédure valide

Jordan se rapproche de la procédure algébrique par l'intermédiaire d'un dessin pour chacune des informations.
Pour résoudre la première question, ceci l'amène, en comparant les deux dessins à trouver mentalement 7 qu'il valide par l'écriture 26 – 7 = 19
La solution est 7 qui représente le prix du biscuit qu'on enlève en passant d'un dessin à l'autre.

Pour résoudre la seconde question, il utilise son résultat pour calculer le prix de trois biscuits : $3 \times 7 = 21$ puis il trouve le complément à 26 qui est 5 :
- soit mentalement et il valide par l'écriture 21 + 5 = 26
- soit après avoir écrit une addition à trou 21 + . = 26,

ce qui lui donne le prix du croissant 5F.

Judith :

Procédure valide

Elle commence par décomposer le nombre 26 en posant par hypothèse que le prix d'un biscuit est 7F. Elle calcule le prix de 3 biscuits 21F et trouve le prix du croissant par complément à 26 comme on l'a vu pour Jordan : 21 + 5 = 26.
Ceci se traduit par l'écriture $7 \times 3 = 21 + 5 = 26$ (égalité non valide sur le plan formel mais qui traduit une succession de deux raisonnements corrects).
A partir de là, avant même de répondre aux questions explicites a) et b) , elle a presque résolu le problème, il lui reste à tester l'hypothèse avec la deuxième information.

C'est peut-être ce qu'elle commence à faire dans la question a) en écrivant $7\times 2 = 14$, il lui reste à écrire 14 + 5 = 19 . Mais elle ne le fait pas peut-être parce qu'elle ne pense pas à prendre en compte le nombre 19 , ou bien parce qu'elle voit qu'elle est en train de répondre à une autre question que la question a) qui concerne le prix des biscuits et non celui du croissant.

Elle change de cap et écrit un raisonnement qui est peut-être (mais cela n'est pas sûr !) celui qui lui a permis de choisir 7 dans la décomposition de 26 au début de son travail.
Raisonnement supposé mais mal explicité : S'il manque 6 F pour avoir un biscuit en plus et s'il reste 1F pour un biscuit en moins, le prix d'un biscuit est bien 6+1 = 7F.
Pour la question b) la phrase qui lui permet de trouver 5 n'est pas claire.

Sara :

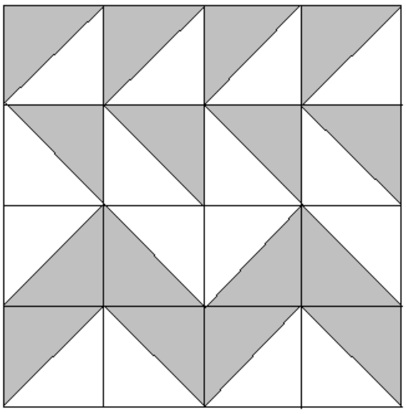
Procédure non valide

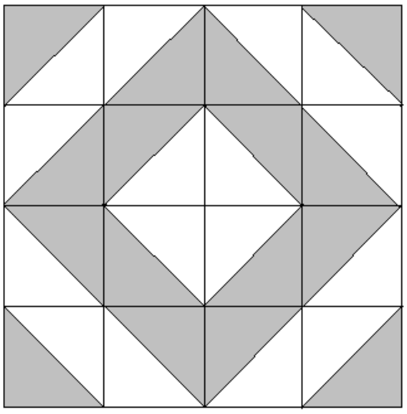
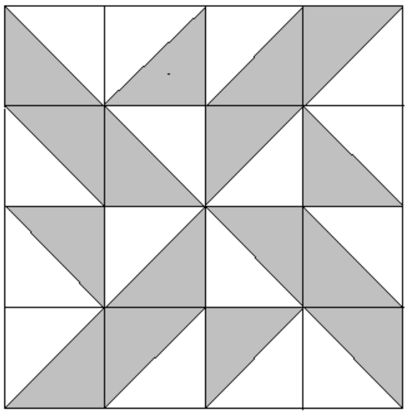
Elle suppose que le prix de chaque gâteau est 5 F sans doute par partage équitable de 20 en quatre. Elle augmente le prix d'un croissant sans doute pour trouver une somme de 26F mais avec une erreur de calcul car la somme n'est que 24F.
Dans la question a) elle justifie le résultat 5 par un calcul non interprétable.

Dans la question b) elle reprend le prix erroné du croissant trouvé au début.

SECOND VOLET (8 points)

Question 1 :
voici un exemple de chaque catégorie

Assemblage sans axe de symétrie 	Pour les assemblages sans axes de symétrie ou invariants par autre chose qu'une symétrie axiale conviennent aussi les deux assemblages de l'annexe 2b

Asemblage ayant quatre axes de symétrie : les 2 médianes et les 2 diagonales du carré extérieur 	Assemblage invariant par rotation d'angle de 90° 

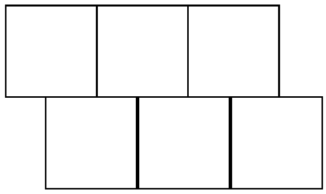
Question 2 : **à propos de la démarche.**

<u>Le document 1</u> donne une démarche en trois points à partir d'un matériel précis et par une liste d'activités :

<u>a- Manipulation libre</u> : fabrication ou assemblage sans ou avec contraintes sur le nombre de carreaux. Le but pourrait être de se familiariser avec le matériel bien que les auteurs en attendent davantage puisqu'ils espèrent des « découvertes » par les enfants dont on se demande en quoi elles vont consister : il n'y a aucune raison qu'ils fassent spontanément des assemblage de carrés en rectangle ou en carrés 4x4 .
Le statut de la phrase entre parenthèse (« par exemple on peut faire un carré 4x4 avec 16 carreaux ») n'est pas clair : est-ce une consigne explicite du maître ou une idée spontanée qui va apparaître sûrement et sera valorisée par le maître ?

b- <u>Reproduire un modèle proposé sur grille</u> avec les carreaux placés côte à côte.

c- <u>Créer un assemblage et le représenter sur une grille</u>. Il y a là un présupposé que les élèves aient effectivement décidé grâce au point b de disposer les carreaux.



ainsi   et non ainsi
sinon on ne voit pas à quoi sert la grille ?

C'est dans la deuxième partie de la consigne, la reproduction, que réside l'activité géométrique. La première décision à prendre sera pour l'élève le choix du papier si ce choix lui est laissé (voir question 4). Sur papier blanc, le travail est très complexe pour des CE1. Sur papier quadrillé à la même échelle, il s'agit d'un repérage. Avec une autre échelle, il s'agit encore de repérage mais avec agrandissement ou réduction.

<u>Le document 2</u> décrit de façon générale la démarche géométrique par une alternance de deux moments : investigation et réalisation, avec deux exemples de ce que l'on entend par réalisation : reproduire, construire. Ces deux verbes sont précis et se retrouvent dans le b et le c de la démarche du document 1. En revanche, le mot investigation est vague. La phrase suivante : la réalisation nécessite l'anticipation (on dirait aujourd'hui une activité de modélisation plus ou moins implicite) est plus claire. Cette idée ne se retrouve pas dans le document 1.

<u>Le document 1</u> propose les phases de langage (orales) en classe entière dans les mises en commun. Une certaine phase de communication en binôme par un dessin est prévue en c : un élève fait un assemblage et transmet un dessin à un camarade qui doit reproduire l'assemblage.

<u>Le document 2</u> conçoit le langage au sens large (gestuel, oral et écrit, y compris dessin) et ne précise pas la place des phases de langage dans les activités.

Question 3 : A propos de l'activité: familiarisation avec le matériel.

Les remarques sur les deux figures qu'on peut attendre des élèves sont de tous ordres :
- Elles sont jolies, elles ne sont pas les mêmes ;
- Au lieu de voir 16 petits carrés bicolores, je peux voir 4 grands carrés portant soit le même motif dans la même position, soit le même motif mais qui aurait tourné . Dans l'une des figures on voit comme 4 « bobines » et dans l'autre comme 4 « ailes de moulin ». On peut voir 4 bobines blanches ou 4 bobines noires « duales ». Même chose pour les ailes de moulin, mais on voit plus facilement le noir que le blanc.

Une piste d'exploitation pourrait être la suivante : décomposition en sous-figures, régularité non pas liée à des symétries axiales mais à des rotations (d'un demi-tour, d'un quart de tour autour du centre du grand carré obtenu, symétrie centrale).

1-Trouver comment reconstituer chaque figure en faisant tourner une partie de la figure :
- en faisant tourner le grand carré supérieur gauche autour du centre d'un quart de tour à chaque fois ;
- en faisant tourner d'un demi-tour autour du centre les deux carrés du haut qui viennent se superposer aux deux carrés du bas.
2- Construire un autre assemblage qui a les mêmes propriétés.
3- Le premier dessin étant réalisé sur papier, trouver selon quel (s)axe(s) on doit le plier de sorte que tous les noirs recouvrent les blancs et inversement. (difficile pour des CE).

Question 4 : à propos de l'activité « reproduction de figures ».

<u>Sur papier quadrillé</u> l'élève peut suivre les mailles du quadrillage ou non pour reproduire les carreaux. S'il ne les suit pas, l'échec est probable.
La figure à reproduire est faite avec des carreaux de 5cm sur 5cm. Si l'élève qui doit reproduire choisit un papier quadrillé de 1cm x1cm, il pourra faire une reproduction isométrique ou une réduction en prenant moins de 5cm de côté pour chaque carreau sur le papier. Le nombre de lignes non utiles risque cependant de lui compliquer la tâche. Ainsi il y a fort à parier qu'il fera une réduction au cinquième.
Si le papier qu'il choisit est de maille 3cm x 3cm, il pourra faire une réduction aux 3/5 ou un agrandissement aux 6/5.

<u>Sur papier uni</u> la reproduction peut se faire avec la règle graduée et l'équerre : soit tracé du quadrillage global et ensuite remplissage des triangles noirs, soit reproduction pas à pas de chaque triangle rectangle en partant d'un coin. Dans les deux cas, ceci peut se faire en respectant la dimension exacte des carreaux avec une maille régulière de 5cm ou non.
Les compétences requises sont plus importantes avec le papier uni : savoir tracer des lignes droites ou prolonger des segments en droites, savoir tracer des angles droits avec l'équerre, savoir bien mesurer les longueurs. Ces habiletés semblent bien au delà du CE1. En fait ce papier uni est un piège pour l'élève : il ne doit pas le prendre.

Question 5 : à propos de l'activité « agrandissement de figures ».

On ne peut pas respecter la consigne si le nombre de cases que l'on choisit pour le côté horizontal des carreaux bicolores n'est pas un nombre pair. En effet, dans ce cas, les bords verticaux des deux carrés bicolores qui sont sur la ligne du haut ne correspondraient plus aux lignes du quadrillage.

Sachant qu'il s'agit du niveau CE1, les notions mathématiques liées à cette activité sont l'ajustement sur les lignes, la notion de carré et de sa moitié, le triangle rectangle isocèle, la proportionnalité très implicite traduite géométriquement par l'homothétie (un carré représenté par un carré plus grand ou plus petit) ou par l'affinité (étirement ou rétrécissement dans une direction, par exemple carré 4x4 représenté par rectangle 4x3 puisque cette solution a été considérée comme valide).

Question 6 : à propos de l'ensemble de l'annexe2.

Les activités proposées introduisent les rotations qui ne sont plus au programme aujourd'hui. Seuls demeurent les mots : « symétrie axiale » et « agrandissements - réductions » à moins que l'on considère que les programmes actuels (document 3) incluent le mot rotation quand il disent : « vocabulaire lié aux déplacements » ou « quadrillages : repérage des nœuds ou des cases, déplacements ». En revanche dans le texte ancien cité en document 2, on trouve bien les mots « translation » et « rotation ».

Ce n'est pas en les examinant sous l'angle des programmes qu'on peut mettre en évidence le caractère un peu obsolète de ces activités, mais plutôt en les examinant sous l'angle de la conception des situations : quelle est l'activité mathématique réelle de l'élève, que peut-on espérer qu'il apprenne avec telle consigne et tel matériel ? Or cette question n'est pas posée.

LILLE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1
Soit n l'année de naissance de Dürer, et d l'année de son décès. Les lettres n et d désignent deux nombres entiers naturels, tels que $n < d$, qui doivent de plus satisfaire aux deux conditions imposées suivantes : $n + d = 2\,999$ et
$d^2 - n^2 = 170\,943$
Sachant d'autre part que $d^2 - n^2 = (d + n)(d - n)$, on peut en déduire que $d - n$ est égal au quotient de 170 943 par 2 999. Ce quotient est égal à 57.
Le problème revient donc à déterminer deux nombres entiers naturels n et d connaissant leur somme, égale à 2 999, et leur différence, égale à 57.

$$d + n = 2\,999$$
$$d - n = 57$$

Ce système se résout aisément : En ajoutant membre à membre les termes de ces deux égalités, on obtient $2d = 2\,999 + 57$. Le nombre d est égal à $\frac{2999+57}{2}$, ce qui donne 1528.

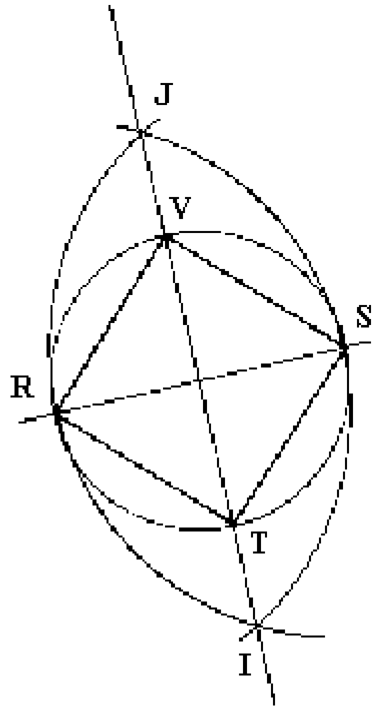
On en déduit n : $n = 2\,999 - 1\,528 = 1471$.

Réponse : **Albrecht Dürer est donc né en 1471 et mort en 1528.**

EXERCICE 2.

Question 1. Activité préliminaire :

figure 1



(IJ) est la médiatrice du segment [RS]. Elle coupe [RS] en O. Le cercle de centre O et passant par R et S coupe (IJ) en V et T. Les diagonales du quadrilatère RTSV ont le même milieu, ont la même longueur et sont perpendiculaires : RTSV est donc un carré.

Note : Les questions suivantes de cet exercice se rapportent à la figure construite sur l'annexe 1 en fin de corrigé.

Question 2.a) Les droites (DE) et (BC) sont parallèles puisque la maille du quadrillage est une maille carrée. Appliquons le théorème de Thalès dans le triangle ABC, il nous permet d'écrire l'égalité des rapports $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$. Le rapport $\frac{AD}{AB}$ est égal à $\frac{1}{3}$ et BC = AF.

Par conséquent : $\frac{DE}{AF} = \frac{1}{3}$, d'où l'on tire l'égalité : DE = $\frac{1}{3}$AF.

Questions 2.b), 2.c), 2.d), et 2.e) : Ces constructions sont effectuées sur la feuille annexe1.

Question 3.

Question 3.a) Par construction MP = DF. Le segment [DF] est une diagonale d'un carré dont les côtés ont une mesure égale à 4 centimètres. Par conséquent DF = $4\sqrt{2}$.

La mesure exacte de MP, exprimée en centimètres, est égale à $4\sqrt{2}$.

Une mesure approchée, à 10^{-2} près, donc au centième près, et exprimée en centimètres, sera :
soit MP $\approx$ 5,65 , soit MP $\approx$ 5,66 selon que l'on choisisse une mesure approchée par défaut ou par excès.

Question 3.b)
La hauteur totale L de la figure est égale à la somme de trois longueurs :
L = P'M' + BA + MP
P'M' est égale à MP, donc L = BA + 2MP.
La valeur exacte de L, exprimée en centimètres, est égale à $12 + 8\sqrt{2}$.

$$L = 12 + 8\sqrt{2}.$$

Une mesure approchée par défaut, exprimée en centimètres, à 10^{-2} près, donc au centième de centimètre près, est égale à 23,31.

$$L \approx 23{,}31 \quad \text{(cm)}$$

Question 3.c)
La largeur totale l de la figure est égale à somme des longueurs NK + BC + YQ'.

On sait que YQ' = NK. Calculons NK : NK = ON - OK

NK = $\frac{1}{2}\text{MP} - \frac{1}{3}\text{BC}$, NK = $\frac{1}{2}\text{DF} - \frac{1}{3}\text{BC}$, NK = $2\sqrt{2} - \frac{4}{3}$

l = 2NK + BC l = $4\sqrt{2} - \frac{8}{3} + 4$, et finalement l = $4\sqrt{2} + \frac{4}{3}$

La valeur exacte de l, exprimée en centimètres, est égale à $4\sqrt{2} + \frac{4}{3}$.

Sa valeur approchée par défaut, exprimée en centimètres, à 10^{-2} près, est égale à 6,99 (cm).
Sa valeur approchée par excès, exprimée en centimètres, à 10^{-2} près, est égale à 7 (cm).
Retenons la seconde valeur : l $\approx$ 7 (cm)

Question 3.d) On peut concevoir deux types de vérification, l'une « géométrique », l'autre basée sur des valeurs de mesures.

Justification géométrique : Le centre O du carré MNPQ est situé à $\frac{2}{3}$ de centimètre à gauche de l'axe vertical du rectangle ABCF (car $\frac{2}{3}$ = 2 - $\frac{4}{3}$) Les points N et Q sont symétriques par rapport à O. Le point Q déborde donc moins à droite que le point N.

Vérification par le calcul des mesures :
La distance de Q à la droite (CF) est égale à HQ. HQ = OQ - OH donc
HQ = $2\sqrt{2} - \frac{8}{3}$
La distance de N à la droite (AB) est égale à NK. NK = ON - OK donc
NK = $2\sqrt{2} - \frac{4}{3}$.
Cette seconde distance est supérieure à la précédente : Le point Q déborde donc moins à droite que le point N.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1.
La mesure de la largeur d'une étiquette est égale à 3 centimètres. La mesure de la longueur d'une étiquette est égale à 4 centimètres.
Les réponses justes sont donc celles proposées par Antoine et Mickaël.

Procédure d'Antoine :
Il y a 5 largeurs d'étiquettes sur le bord gauche de la feuille, et celui-ci mesure 15 cm. Antoine en déduit que la largeur est cinq fois moins grande que le bord gauche de la feuille. Il a divisé 15 par 5 et obtenu la mesure 3cm pour la largeur d'une étiquette. Il explique ensuite que sur le bord supérieur de la feuille, il voit une longueur et deux largeurs d'étiquettes pour 10 centimètres en tout : Deux largeurs mesurent 6 centimètres (3 + 3), il en déduit donc la mesure de la longueur en cherchant le complément à 10 du nombre 6. (L'expression « il reste 4 cm » traduit la différence entre les nombres 10 et 6).

Procédure de Mickaël :
Mickaël n'a rédigé que les opérations qu'il a effectuées, en numérotant l'ordre 1, 2, 3 de ses calculs. La première division correspond au calcul de la largeur d'une étiquette (la largeur est cinq fois moins grande que le bord gauche de la feuille). La soustraction 15 - 3 = 12 correspond sans doute au fait que dans le coin droit inférieur de la feuille, il serait possible de placer une étiquette : Il « manque » une largeur de 3 cm pour compléter le bord droit de la feuille. Les trois étiquettes disposées le long du bord droit de la feuille mesurent donc 12 centimètres. La longueur de chacune des étiquettes est donc obtenue en divisant cette longueur par 3.

Question 2.
Arnaud a effectué une multiplication : $2{,}4 \times 11$. Il a indiqué explicitement que 11 représentait le nombre d'étiquettes déjà tracées (ce qui est à la fois visible sur le dessin et écrit dans l'énoncé). Le nombre 2,4 correspond vraisemblablement à une mesure effective, faite sur le dessin, de la longueur d'une étiquette. Arnaud a donc confondu dimensions réelles et dimensions de la représentation. Par ailleurs son calcul répond à un autre problème que celui qui est posé, et l'opération elle-même est fausse (Arnaud a obtenu 4,8 au lieu de 26,4 du fait de l'absence de décalage dans la multiplication). Il a en effet multiplié le nombre d'étiquettes par la longueur mesurée sur le dessin. Enfin, Il a reporté le nombre 2,4 pour la longueur et pour la largeur. Il n'a pas vérifié si ses réponses étaient compatibles avec d'une part les données du dessin et le dessin lui-même où on ne voit pas de carrés...

Laura a d'abord déterminé correctement la largeur des étiquettes, ce que montrent l'écriture $3\times5 = 15$ et ses ajouts sur le bord droit du dessin. Elle procède de la même façon pour l'étiquette située en haut et à droite, mais partage les 7 centimètres restants en deux parties « égales », de même mesure égale à 3,5 cm. Elle vérifie que la somme des trois mesures donne bien, en tout, 10 centimètres, par un calcul en ligne (Deux fois 3,5cm et 3cm font 10cm). L'erreur essentielle est donc d'avoir confondu largeur et longueur d'une étiquette. Le calcul de Laura correspond en effet à une autre disposition des étiquettes sur le bord supérieur : 2 étiquettes en « longueur » et une étiquette en largeur.

Doriane a effectué tous les calculs adaptés et corrects pour obtenir successivement les dimensions 3 et 4 des étiquettes (3 est le quotient de 15 par 5, et 4 est obtenu par différence entre 10 et 3×2). Elle a inversé ces nombres en complétant sa réponse aux deux questions finales. Elle a donc inversé largeur et longueur.

Commentaire : L'inversion largeur/longueur effectuée peut avoir plusieurs causes : Confusion due à la polysémie de ces termes, à l'orientation du dessin de la feuille et des étiquettes, à une précipitation pour rédiger la réponse... Rien ne permet d'augurer sur ce point.

Marine a calculé correctement la largeur des étiquettes en effectuant une division euclidienne. Elle a reproduit le même procédé de division en parts égales pour déterminer leur longueur sans tenir compte de l'orientation différente des étiquettes rangées le long du bord supérieur du dessin. Comme s'il y avait trois longueurs pour faire 10 cm. Sa division euclidienne de 10 par 3 lui permet d'obtenir le nombre 3, pour la seconde fois. Ses réponses sont donc 3 et 3. Cependant, en lisant les informations supplémentaires qu'elle a jointes, on peut constater qu'elle intervertit elle aussi, largeur et longueur. En effet le quotient de 15 par 5 donne la largeur et non la longueur d'une étiquette.

Question 3.
Marine et Laura ont su déterminer la largeur d'une étiquette en résolvant une situation de partage simple (lorsqu'une longueur, égale à 15 cm, est constituée de cinq segments identiques, chacun d'eux mesure 3 cm). Par contre elles n'ont pas su résoudre la suite du problème, en confondant, ou en ne distinguant pas, des côtés de longueur différente, la largeur et la longueur d'un petit rectangle. Le nouveau problème, construit sur un modèle identique au précédent, propose des étiquettes dont les dimensions à déterminer sont respectivement de 2 et de 5 centimètres. La longueur d'une étiquette est deux fois et demie plus grande que sa largeur. La différence entre largeur et longueur est donc nettement sensible. Cela devrait attirer l'attention des élèves sur cette différence de longueur. Cela laisse à penser que le maître cherche à vérifier si l'erreur faite par ces élèves n'est pas due au seul fait que les deux dimensions n'étaient pas suffisamment différentes dans le premier dessin.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1.
Les réponses se réfèrent à l'énoncé « Le petit déjeuner du dimanche » (annexe 4).

- Le rôle de cet énoncé : Pour le maître, il s'agit visiblement de s'appuyer sur un exemple pour « montrer » ce qu'il veut « enseigner », faire apprendre et retenir.
- Les objectifs visés sont de montrer que les deux opérations, addition et multiplication, peuvent permettre de résoudre le problème, que l'on peut utiliser

l'une et/ou l'autre mais qu'il peut être avantageux, et donc préférable, d'utiliser la multiplication dans certains cas (C'est d'ailleurs cette dernière solution qui sera privilégiée dans les exercices suivants). L'étude faite par le maître avec ses élèves doit servir d'exemple suffisamment marquant pour lui permettre de passer, immédiatement après, à une phase d'institutionnalisation de ces principes. C'est en effet ce que prévoit le scénario proposé dans le livre du maître.

- Les tâches prescrites aux élèves sont remarquablement simples : Il leur faut placer les nombres rencontrés dans l'énoncé à l'endroit qui leur convient, c'est à dire dans les « trous » qui leur sont réservés, les signes opératoires étant déjà écrits, et le nombre de « trous » étant lui aussi déterminé en fonction de la réponse souhaitée. La seule tâche réelle consiste donc à identifier ce que représentent les nombres et à compléter en fonction les écritures à trou de l'énoncé : par exemple le nombre de plaques de beurre et le prix de chacune...
  L'écriture additive précède dans les deux cas l'écriture multiplicative équivalente. Il est difficile d'écrire autre chose que ce qui est attendu ! La discussion collective (« échanges et propositions ») a pour but vraisemblable que tous les élèves écrivent les mêmes réponses. Dans ces conditions, on ne sait trop de quelle utilité peut être la « vérification individuelle » prévue.
- Le choix des valeurs numériques. Le nombre 2 est choisi pour montrer que lorsqu'il n'y a que deux termes dans une addition, cette opération s'avère aussi « rapide » que la multiplication qui lui correspond : $7 + 7 = 7 \times 2$. Il est bien évident que le changement d'une écriture additive pour une écriture multiplicative se justifie difficilement lorsqu'il s'agit d'une addition réitérée de deux termes. Cependant, le choix de nombres aussi « petits » n'est guère pertinent dans la mesure où les élèves de CE2 n'ont pas besoin de calculer d'une façon ou d'une autre pour savoir que ces deux écritures désignent le nombre 14. Cela, ils le savent ! Le choix de 9 et 28 est probablement fait pour montrer qu'une addition de 9 termes serait moins « rapide » qu'une multiplication. Si la comparaison pause un réel problème aux élèves, ce choix est aussi discutable, car il existe des procédures de calcul utilisant la prélinéarité, ou même la linéarité, que les élèves pourraient appliquer et qui s'avèrent au moins aussi efficaces et fiables que la multiplication. D'autant plus qu'il est bien clair, dans ce document, que les élèves ne maîtrisent pas la technique de la multiplication, puisqu'elle doit être abordée dans des chapitres ultérieurs. Donnons deux exemples : « S'il y avait 10 paquets, cela ferait 280 francs mais il y a un paquet en trop » amène à un calcul de 280 - 28 , ou encore : « Deux paquets coûtent 28 + 28 = 56 francs ; quatre paquets coûtent 56 + 56 = 112 francs; huit paquets coûtent 112 + 112 = 224 francs donc neuf paquets coûtent 224 + 28 = 252 francs. » Les auteurs font sans doute l'hypothèse que ces notions ont déjà été vues au CE2 et qu'il ne s'agit que d'un simple rappel.

Question 2.

- Dans les objectifs, on évoque la « *capacité à utiliser le sens des opérations dans les raisonnements à propos d „énoncés* ». Cette capacité concerne les élèves. Or la fiche proposée ne leur permet guère de l'exercer. Ce n'est pas le sens qui dirige les élèves, mais les contraintes de la fiche. Rappelons que les signes y sont déjà imposés. Donc, si la reconnaissance des relations qui lient les données numériques identifiées et pertinentes dans un énoncé et le choix d'une procédure efficace et fiable sont bien des capacités à développer au CE2, le scénario évoqué et la fiche sont discutables, car ils ne permettent pas à l'élève de jouer son rôle.

- On attend que « *le choix raisonné de l'élève porte sur l'économie des calculs à réaliser* ». Il semble qu'il y ait confusion entre « écriture additive» et « addition » (calcul d'une somme), entre « écriture multiplicative » et « multiplication » (calcul d'un produit de deux nombres). En effet, si une écriture multiplicative a $\times$ b est en général plus « courte » que l'écriture d'une addition réitérée équivalente (dès lors que a ou b sont des entiers assez grands), le calcul du produit par un algorithme multiplicatif n'est pas nécessairement la meilleure façon de procéder. Le calcul mental en propose de nombreux exemples.
- Le titre « Recherche », donné à l'étape 3, est contestable, puisque l'objet de la recherche n'est aucunement annoncé. (Cela aurait pu être : Comment peut-on écrire, sans le calculer, le prix du petit déjeuner ? Y a-t-il plusieurs façons de l'écrire ? Quels avantages peut-on trouver à certaines et pas à d'autres ?) Une situation de recherche doit inciter autant à poser des questions qu'à répondre à des questions posées. Or ici la leçon se limite à montrer quelques exemples et à énoncer la notion mathématique visée. Les élèves n'y ont pas un rôle d'acteur. On ne peut même préjuger de leurs représentations spontanées étant donné l'absence réelle de liberté d'action laissée par la fiche.

<u>Commentaire</u> : L'activité évoquée s'inscrit dans une pédagogie ostensive.

Question 3.

- n°3 chapitre 9. Il s'agit d'un problème de proportionnalité, d'une correspondance entre deux grandeurs (nombre de rangées et nombre de salades). Chaque rangée contient 100 salades, **donc** 7 rangées devraient contenir 700 salades. Le choix du nombre 100 permet à un élève de CE2 de résoudre l'exercice en ne faisant appel qu'à ses connaissances de la numérations décimale : « 100, c'est une centaine ; donc 7 centaines, c'est 700. ».

On peut aussi penser que des élèves se représentent la plantation comme une collection organisée en rectangle. Toutefois, cette représentation n'intervient pas sur les procédures de calcul susceptibles d'être mises en œuvre.

- n°1 chapitre 9. 15 tours d'un circuit de 7 km correspondent à une distance 15 fois plus grande que la longueur du circuit (si les tours sont complets...). Problème de proportionnalité, de correspondance entre deux grandeurs (nombre de tours et distance parcourue en km). La linéarité permet de répondre aisément : 10 tours font 70 km ; 5 tours c'est la moitié de 10 tours, cela fait donc 35 km ; donc 15 tours feront 70 + 35 = 105 km.
- n°2 chapitre 25. Dans ce problème, le nombre 4 définit un **rapport** entre deux grandeurs de même nature : Le nombre de BD lues par Paul est 4 fois plus grand que celui qu'a lues Alain. Etant donné le choix de ce rapport, l'addition, la duplication (doubler deux fois), permettent de calculer rapidement la réponse. Cet exercice correspond au premier schéma proposé à la page précédente dans ce manuel.

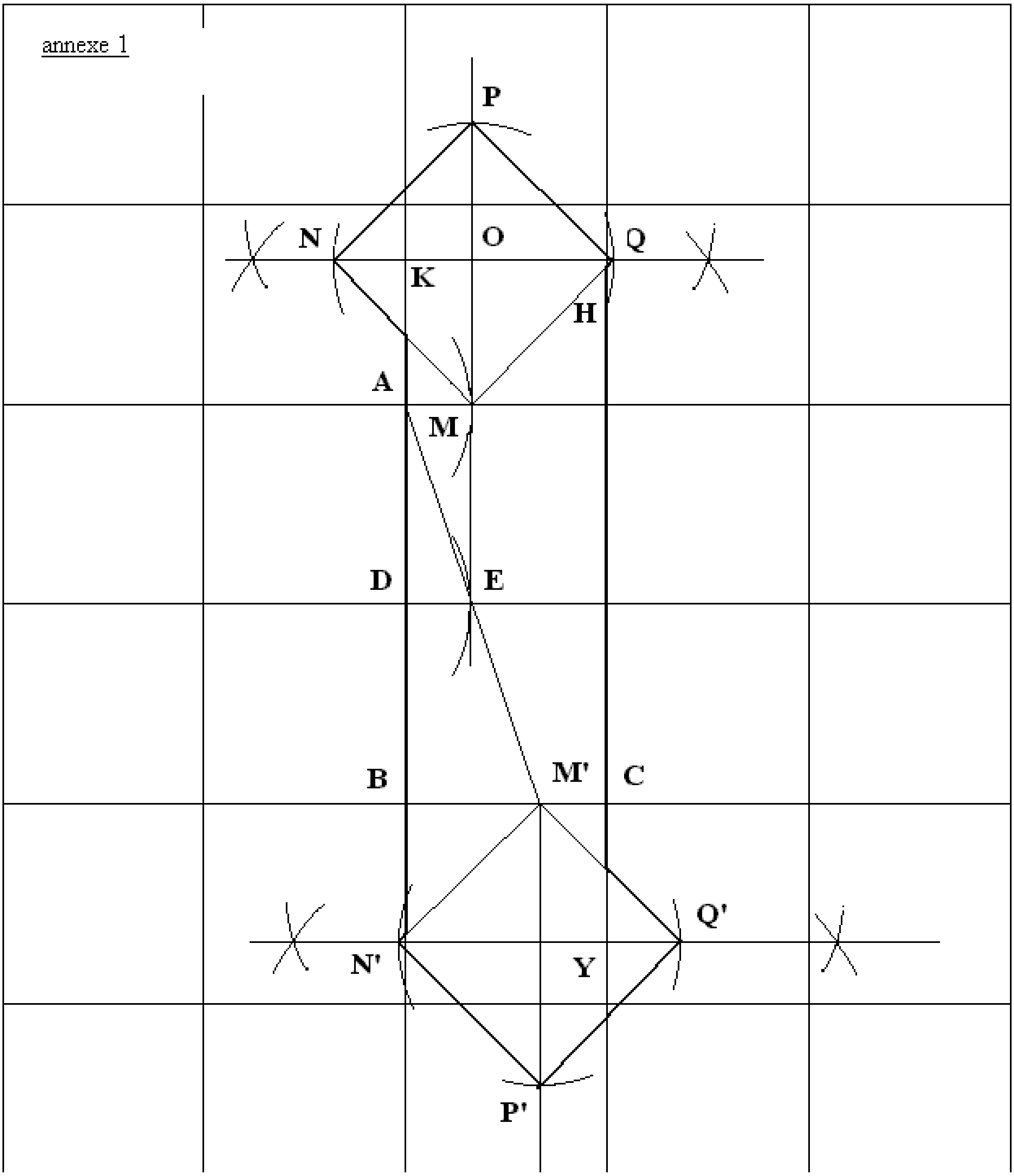
Question 4.

Dans l'exercice 5 du chapitre 9, l'ambiguïté tient au fait que l'on ne sait quels jours la ludothèque est ouverte et sur quels jours porte la question. Modification pour obtenir un problème additif : Combien d'enfants se sont inscrits pendant ces deux jours de congé ?

Dans l'exercice 4 du chapitre 9, l'ambiguïté ne peut concerner la distance parcourue. Il est peu raisonnable de penser qu'une course de natation pour « des élèves » pourrait se faire sur une distance de 675 mètres ($25 \times 27 = 675$). Ce problème semble donc n'être qu'un piège, puisque ne relevant ni de l'addition, ni de la multiplication, la bonne réponse étant ... 25 mètres. Si l'on voulait transformer ce problème en problème multiplicatif, il faudrait modifier la question finale en la remplaçant par exemple par celle-ci : Quelle distance totale a été parcourue par l'ensemble de tous les élèves ?
Dans l'exercice 5 du chapitre 25, l'énoncé ne précise pas que les rangées de voitures doivent, chacune, contenir le même nombre de voitures. Cette précision ne devrait pas être implicite (120 pourrait être la somme de 12 nombres entiers pas nécessairement égaux, le problème ne serait pas un problème multiplicatif). La modification pourrait être d'ajouter la précision suivante : Toutes les rangées contiennent le même nombre de voitures.
(Il en est de même pour l'exercice 3 de cette même page : Les rangées de CD doivent toutes contenir le même nombre de CD, mais c'est en général le cas dans la réalité, ce qui n'est pas vrai pour les parkings.)

Question 5.
Le premier schéma présenté concerne un problème multiplicatif de proportionnalité, traduisant un rapport entre des quantités de même nature : Les énoncés 1, 2, 4 et 6 qui suivent relèvent de ce modèle (le double, le triple, 4 fois plus...correspondent à un opérateur, un scalaire, un « nombre de fois »).
Le second schéma ne relève pas du même modèle… La situation peut être représentée par une configuration rectangulaire. Il aussi s'agit de groupements ou de changement d'unités : Dans l'album de Dimitri, 5 est le nombre de rangées, il y a le même nombre de cartes par rangée et 20 est le nombre total de cartes. Pour trouver le nombre de cartes par rangée, un raisonnement pourrait être : « Dans une rangée, il y 5 fois moins de cartes. » Le schéma devrait alors être différent de celui qui est proposé, 5 étant interprété comme un opérateur.
L'appel à un opérateur n'est sans doute pas ici l'aide la plus adaptée ; une aide possible serait peut-être à amener l'élève à produire une configuration rectangulaire.
Les exercices 3 et 5 qui suivent, page 73, sont à rapprocher de ce second modèle. Ce second schéma ne semble pas une aide manifeste à leur résolution.

<u>Commentaire sur cette dernière question</u> : Un schéma peut apporter une aide à la résolution de certains problèmes s'il permet à l'élève de se représenter la situation. Certains enfants y recourent volontiers, lorsque ces représentations ont du sens pour eux. Cependant le recours systématique à un schéma peut aussi constituer un obstacle à l'évolution des connaissances.
Par ailleurs, le champ des problèmes multiplicatifs ne se limite pas aux deux types de problèmes donnés en exemples : De tels schémas ne permettent pas de représenter des problèmes de dénombrement de produits cartésiens ou des problèmes liés à des configurations rectangulaires. La multiplication ne doit pas être attachée de manière trop rigide à un seul contexte, ni à des formules (schémas) stéréotypées susceptibles dès lors de déclencher des erreurs.


annexe 1
P
N
O
Q
K
H
A
M
D
E
B
M'
C
Q'
N'
Y
P'

LIMOGES

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

Question 1 :
Question 1.a. Nous proposons deux types de justifications pour répondre à cette question :
Première justification (calcul mental) : En remarquant qu'un litre d'essence possède la même valeur, en arrondissant au centième près, en francs qu'un euro (6,56 francs au lieu de 6,55957 francs), **40 litres coûtent donc 40 euros.**
Seconde justification (calcul) : Un litre d'essence coûtant 6,56 francs, 40 litres coûtent 40 fois plus, soit 6,56 $\times$ 40 = 262,40 francs. En divisant 262,40 par 6,55957, on obtient avec une calculatrice une valeur en euros égale à 40,002622... En arrondissant au cent près, on obtient donc la même valeur de 40 euros.
Remarque : Que l'on arrondisse avant ou en fin de calcul, les deux procédures donnent le même résultat : 40 euros.

Question 1.b.
i) Appliquons la règle proposée à la valeur de 262,40 francs :

$$262{,}40 \rightarrow \frac{262{,}40 + 131{,}20}{10} = 39{,}36$$

Selon ce procédé, **40 litres d'essence coûtent 39,36 euros**.

ii) L'erreur relative commise en appliquant cette règle de calcul, est égale au quotient. Cette erreur, égale à, exprimée en pourcentage, est donc égale à **1,6%.** Cette valeur est bien inférieure à 2%.

Question 1.c.
Pour retrouver en francs français un prix exprimé en euros, il faut multiplier cette valeur (en euros) par 6,55957, soit approximativement par 6,6.
Or 6,6 = 6 $\times$ (1 + 0,1). Sachant que 6 $\times$ (1 + 0,1) = 6 + $(\frac{1}{10} \times 6)$, une méthode consiste à **multiplier le prix par 6, puis à ajouter le dixième du produit obtenu.**
Exemple d'application pour 40 euros : 40 $\rightarrow$ 240 + 24. On obtient par cette règle une valeur de 264 francs, assez proche des 262,40 francs de la première question.

Question 2.
S'il considère que le nombre 2 constitue une approximation acceptable du nombre 1,95583 , un allemand admettra qu'un euro correspond à peu près à 2 marks. Pour

obtenir un prix approché en euros pour un prix affiché en marks, il lui suffira simplement de **diviser ce dernier prix par 2**. Par exemple, 80 marks correspondront à 40 euros environ.

Question 3.
Question 3.a.

Transformons l'écriture fractionnaire de A : $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, donc $A = \dfrac{1}{100 \times \frac{5}{3}}$

On obtient $A = \dfrac{3}{500}$. Cette fraction peut s'écrire $A = \dfrac{6}{1000}$, ou encore $A = \dfrac{6}{10^3}$

Il existe donc un entier p, p = 6, et un entier n, n = 3, tels que $A = \dfrac{p}{10^n}$

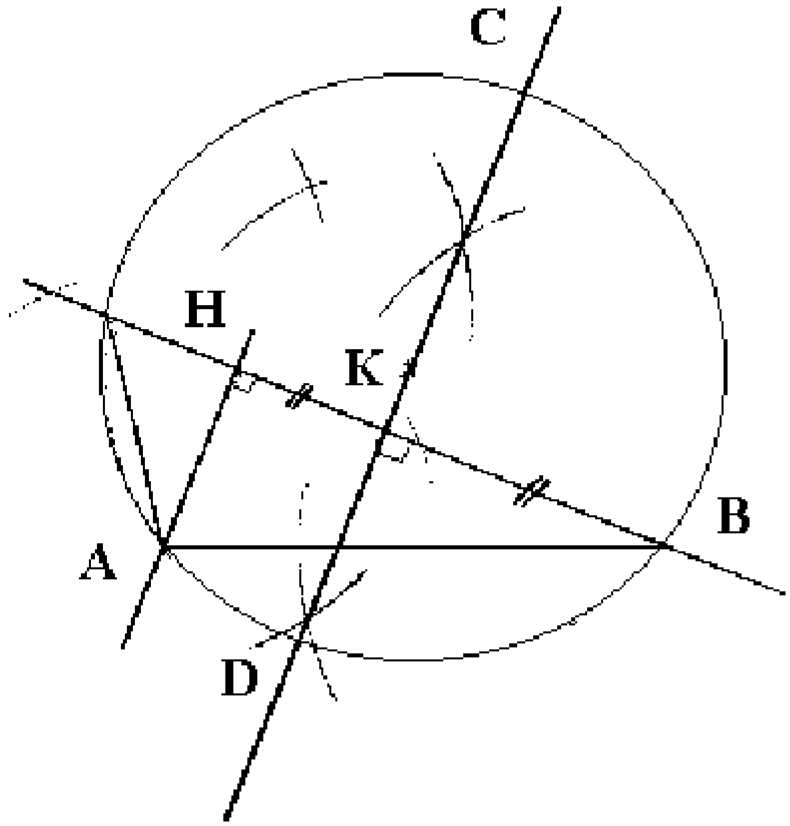
Commentaire : Il s'agit en fait de trouver une écriture fractionnaire décimale du nombre A.

Question 3.b.
Pour convertir en euros un prix affiché en pesetas, un espagnol doit diviser ce dernier prix par le nombre 166,386. En remarquant que le nombre $\dfrac{1000}{6}$ est un nombre proche de 166,386 (à 3 dixièmes d'unité près), un espagnol peut raisonnablement remplacer 166,356 par $\dfrac{1000}{6}$.
Ainsi, au lieu de devoir diviser le prix par un nombre décimal ayant une partie décimale de trois chiffres, il lui sera plus facile de multiplier par l'inverse de $\dfrac{1000}{6}$, donc par $\dfrac{6}{1000}$. Multiplier par ce nombre se fera en deux étapes, d'abord **multiplier par 6, puis diviser par 1000**, ce qui est manifestement plus « pratique ».
Par exemple, 5000 pesetas valent 30 euros environ.

EXERCICE 2

Question 1 :
Question 1.a.

figure 1



Question 1.b.
Le point D est sur la médiatrice de [BC], donc DB = DC. On en déduit que **le triangle DBC est un triangle isocèle.**

Question 1.c.
Les triangles ABC et DBC ont un côté commun, le côté [BC].
Pour le triangle ABC, la hauteur relative à ce côté a pour mesure AH.
Pour le triangle DBC, la hauteur relative à ce côté a pour mesure DK, puisque (DK) est perpendiculaire à [BC].

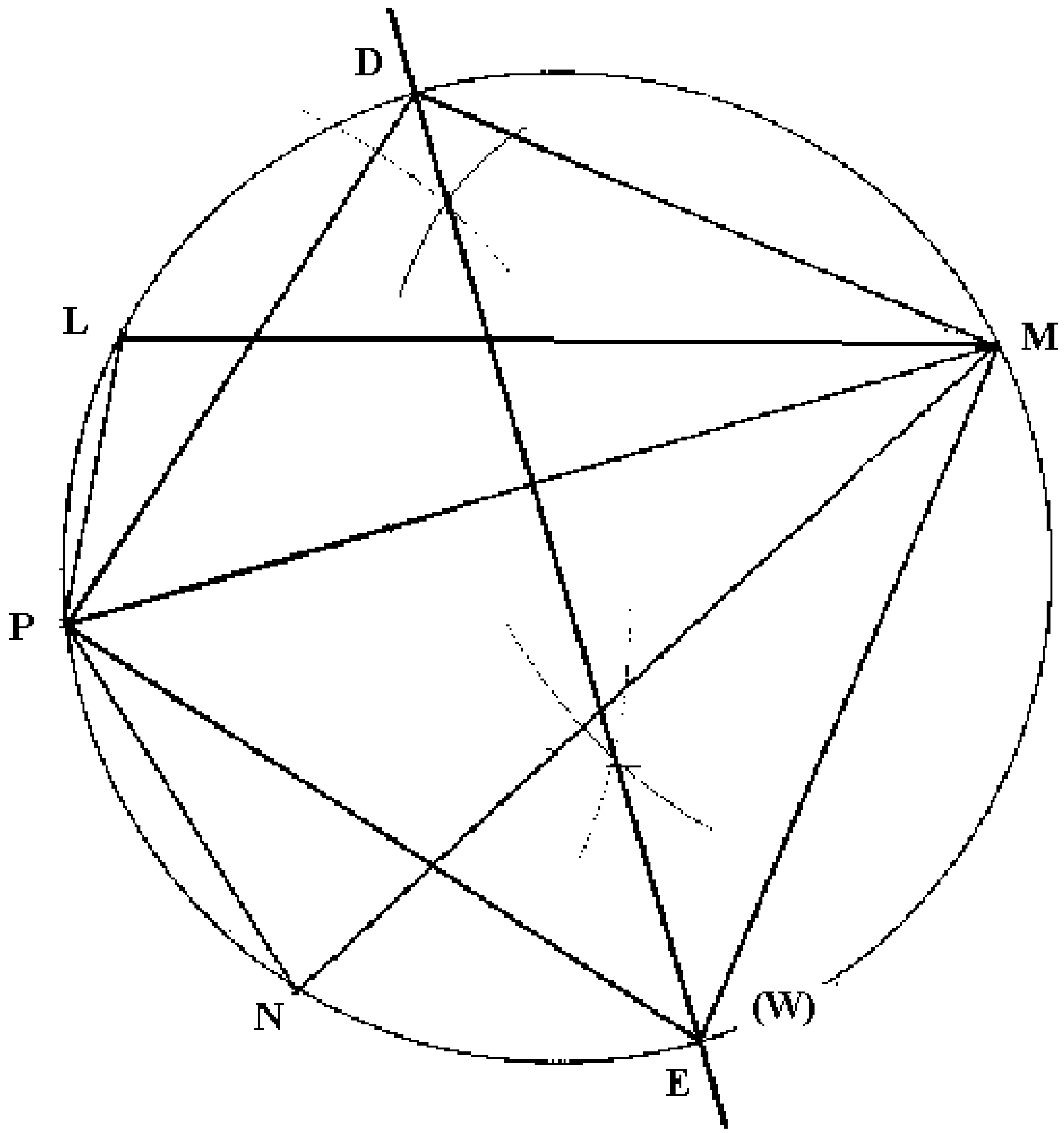
$$\text{aire(ABC)} = \frac{1}{2} \times \text{BC} \times \text{AH} \quad \text{et} \quad \text{aire(DBC)} = \frac{1}{2} \times \text{BC} \times \text{DK}$$

L'inégalité AH < DK étant admise, on en déduit l'inégalité des aires des deux triangles :

aire(ABC) < aire(DBC)

Question 2.
Question 2.a.

figure 2



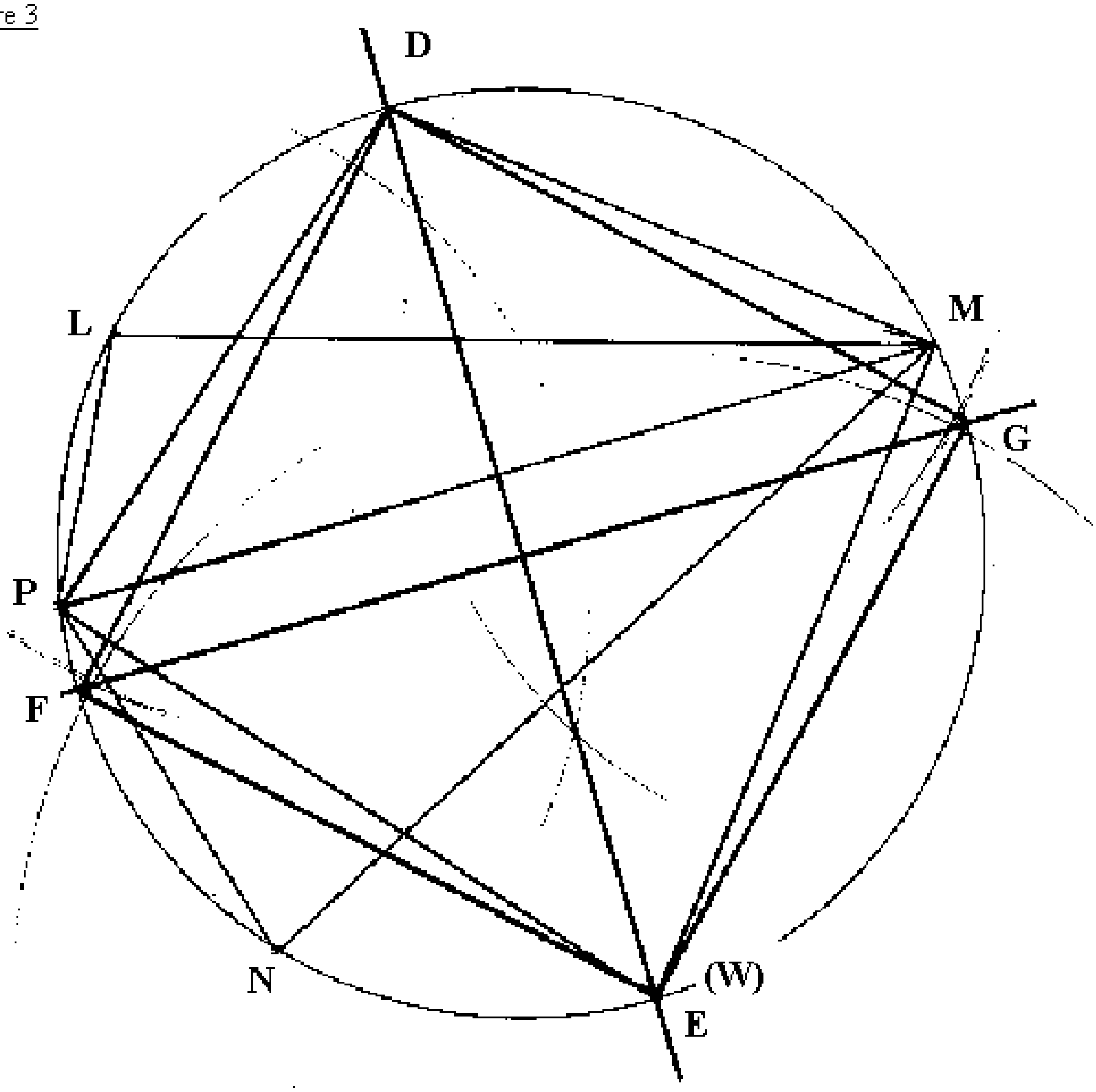
LMNP est un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle (W) et n'ayant pas deux côtés consécutifs égaux. Pour utiliser les résultats de la première question, on va considérer les triangles MLP et MNP, situés de part et d'autre de la diagonale [MP] du quadrilatère. Ces triangles ne sont pas isocèles. Traçons la médiatrice du segment [MP]. Elle coupe le cercle (W) en deux points D et E. Appelons D le point qui est situé du même côté que L par rapport à la droite (MP), et E le point qui est situé du même côté que N par rapport à la droite (MP).

Les triangles MDP et MEP sont deux triangles isocèles (car DM = DP et EM = EP)
Le quadrilatère MDPE est inscrit dans le cercle (W), il est convexe car D et E sont de part et d'autre de [MP], et il possède deux paires de côtés de même longueur, [DM] et [DP] d'une part, et [EM] et [EP] d'autre part). En appliquant le résultat de la question 1, on admettra les deux inégalités d'aire suivantes : aire(MLP) < aire (MDP) et aire(MNP) < aire(MEP).
Le quadrilatère LMNP est la réunion disjointe des triangles LMP et MNP, et, de même, le quadrilatère MDPE est la réunion disjointe des triangles MDP et MEP.
On en déduit l'inégalité entre les aires des deux quadrilatères : aire (LMNP) < aire (MDPE).
Le quadrilatère MDPE est le quadrilatère Q' répondant aux conditions requises.

Commentaire : L'énoncé nous semble permettre de penser qu'une justification plus succincte pouvait être considérée suffisante par les correcteurs.

Question 2.b.
Admettons l'hypothèse que Q' ne soit pas un carré. L'une de ses diagonales cependant, la diagonale [DE], passe par le centre du cercle circonscrit (W), et, par conséquent, est donc un diamètre de ce cercle. L'hypothèse se traduit donc : la seconde diagonale de Q', le segment [MP], n'est pas elle non plus un diamètre du cercle (W).
On applique au quadrilatère Q' la méthode précédente, qui consiste à considérer le quadrilatère Q' comme la réunion de deux triangles non isocèles DME et DPE, et à construire alors deux triangles isocèles dont l'aire sera strictement supérieure à celle des deux triangles précédents. Traçons la médiatrice de [DE]. Elle coupe le cercle (W) en deux points que l'on notera F et G. On obtient ainsi deux triangles isocèles DFE et DGE, situés de part et d'autre de (DE). Appelons Q'' le quadrilatère DFEG.
Q'' sera un carré car ses diagonales [DE] et [FG] sont perpendiculaires, elles ont pour milieu le même point, à savoir le centre du cercle (W), et ont la même longueur puisque ces segments sont deux diamètres d'un même cercle. Le carré Q'' étant la réunion disjointe de deux triangles isocèles ayant respectivement une aire strictement supérieure à celle des triangles DME et DPE, son aire sera strictement supérieure à celle de Q'.

figure 3



Question 3.

La démonstration contient trois parties :

1ère partie : L'aire d'un carré inscrit dans un cercle de rayon R est égale à 2 R^2.

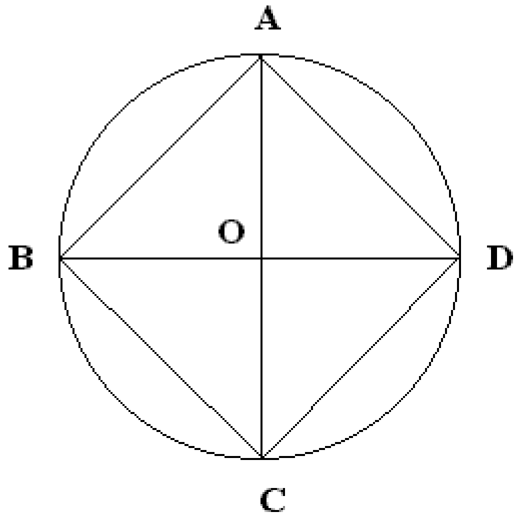
Soit ABCD un carré inscrit dans un cercle de rayon R. Etant un carré, ABCD est un losange. Une mesure de son aire se calcule par la formule aire(ABCD) = $\frac{1}{2} \times AC \times BD$. Comme les diagonales [AC] et [BD] ont chacune pour mesure 2R, on obtient : aire(ABCD) = 2 R^2.

Commentaire : nous proposons un calcul utilisant la formule de calcul de l'aire du losange à partir de ses diagonales. On peut aussi utiliser le théorème de Pythagore : ABCD étant un carré, son aire est égale à :

aire(ABCD) = AB^2.

Calculons AB^2. D'après Pythagore(voir figure ci-dessous) :

$AB^2 = BO^2 + AO^2 = 2R^2$.



2**^{ème}* ***partie **:**
Soit ABCD un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de rayon R.
Si ABCD est un carré, alors, d'après ce qui précède, son aire aura pour mesure 2 R^2.
Si ABCD n'est pas un carré, alors deux au moins de ses côtés, consécutifs, ne peuvent être de même longueur.
Sinon, ses quatre côtés auraient tous la même longueur, et ABCD serait alors un losange, inscrit dans un cercle. Or un losange inscrit dans un cercle est nécessairement un carré !
preuve : Soit ABCD un losange, inscrit dans un cercle de centre O. La droite (BD) est la médiatrice de [AC]. Or OA = OC (rayons du cercle), donc O est sur la diagonale [BD]. De la même façon, on monterait que O est sur l'autre diagonale du losange, le segment [AC]. Les deux diagonales du losange sont donc des diamètres du cercle circonscrit et ont la même longueur. Cela permet d'affirmer que ABCD est nécessairement un carré.

3**^{ème}* ***partie **: Si ABCD est un quadrilatère, convexe, inscrit dans un cercle, et s'il possède deux côtés consécutifs de longueur différente, alors on peut construire un carré Q'' inscrit dans le même cercle, dont l'aire sera strictement supérieure à celle de ABCD**.
Ce résultat résulte de la question 2 de ce problème.
Ainsi aire(ABCD) < aire(Q'') et aire(Q'') = 2 R^2. Par conséquent aire(ABCD) < 2 R^2.

Conclusion : Soit Q un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de rayon R, son aire est inférieure ou égale à celle d'un carré inscrit dans ce même cercle, soit à 2 R^2.
Il n'y a égalité que si le quadrilatère Q est un carré.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES.

Question 1.
Question 1.a. « Texte de construction » :
Trace un carré dont les côtés mesurent 6 centimètres.
Appelle A, B, C et D les sommets de ce carré. Marque les lettres.
Place un point M au milieu du côté [AB].
Place la pointe du compas sur le point M et prends un écartement de 3 cm de rayon.
Trace le cercle de centre M, de rayon mesurant 3 cm. (Vérifie que ce cercle passe bien par A et B).
Remarque : Il s'agit de décrire les étapes de construction d'une figure superposable (constituée d'un carré et d'un cercle ayant pour diamètre un des côtés du carré). La position des lettres n'a guère d'importance : Elles ne servent qu'à faciliter la description. On ne peut attendre que des élèves de cycle 3 pensent à indiquer l'orientation du carré ABCD, le sens de rotation rétrograde dans lequel les points sont situés. On peut également penser que certains d'élèves ne mentionneront pas les lettres ci-dessus, cela permet toutefois de construire une figure superposable à la première.

Question 1.b. Aucune des productions ne conduit nécessairement à construire une figure superposable au modèle. Il serait cependant possible qu'un élève, connaissant la nature du problème, ajoute des informations restées implicites et interprète favorablement des informations ambiguës ou insuffisantes.
Production de l'élève A : Elle permet de tracer un carré correct mais n'indique pas où situer le centre du cercle. La mesure du rayon pourrait peut-être être « déduite » par certains élèves en interprétant les informations données...
Production de l'élève B : Elle permet de tracer un carré correct (bien que l'absence du terme « carré » soit sans doute fort gênante pour des élèves de cycle 3), mais ne donne pas d'informations pertinentes sur la position et la taille du cercle.
Production de l'élève C : Elle ne permet pas de construire nécessairement un carré : En effet, pour obtenir un carré, les points C et D, qui sont situés sur deux droites parallèles (et perpendiculaires à la droite (AB)), doivent de plus être situés du même côté par rapport à (AB) (dans le même demi-plan), à 6 cm respectivement de B et de A. Sinon, le quadrilatère ABCD est croisé. On peut toutefois penser que des élèves de cycle 3 sont plus familiers avec les quadrilatères convexes qu'avec ceux qui ne le sont pas, sont plus habitués à construire des rectangles et des carrés que d'autres figures. De ce fait, ils n'auraient pas l'idée saugrenue d'aller placer [AD] du côté où on ne l'attend pas.
Production de l'élève D : Elle permet de tracer un carré correct. Elle invite à tracer un cercle qui doit passer par le point A, mais n'indique pas avec suffisamment de précision où placer le centre du cercle. L'expression « méttésien un point », correspond probablement à « mettez-y un point ». L'adverbe « y » signifie « dans cet endroit là ». Mais le message laisse une assez grande latitude sur l'interprétation de cette dernière expression : Sur [AB], en son milieu, ou ailleurs. On peut toutefois penser que ce sera le milieu du segment (ou le point A) qui sera choisi comme centre…

Question 2.
Commentaire relatif à cette question : Il s'agit ci-dessous des niveaux de savoirs que révèlent ces productions d'élèves dans la situation proposée, et non des élèves eux-mêmes. Par exemple, l'élève C utilise dans son message des connaissances précises et un vocabulaire assez évolué (segment, parallèle, angle droit...) sans faire référence au terme « carré »... qu'il connaît sûrement depuis longtemps. Il est donc probable que l'absence de ce terme provient de ce qu'il n'a pas senti la nécessité de l'employer dans le problème qu'il avait à résoudre.

	A	B	C	D
Reconnaître un rectangle et utiliser ce terme		oui	non (?)	
Reconnaître un carré et utiliser le langage approprié pour cette figure	oui	non	non (?)	oui
Savoir décrire (donner les informations nécessaires à sa construction)	oui	oui	oui	oui
Savoir mesurer un segment	oui	oui	oui	oui
Expliciter des propriétés des rectangles, relatives aux angles ou au parallélisme de leurs côtés...			oui	oui
Décrire le milieu d'un segment	non	non	oui	non
Utiliser le langage adapté pour décrire un cercle	non (rond)	non (sphère)	non (rond)	oui
Connaître et expliciter les techniques de construction	?	?	oui, en partie.	oui, en partie.

Question 3.
L'élève C a décomposé la figure en deux éléments : le carré et le cercle (appelé rond dans sa production.) Il a essayé de décrire une construction étape par étape, trait après trait, de tous les différents segments du carré. Il est plus rapide et moins précis pour la construction du cercle. Il ne s'est pas attaché à décrire la figure finale qu'il fallait obtenir.
L'élève D a bien perçu les deux sous-figures (carré et cercle) à construire. Ses efforts pour décrire la manière d'utiliser le compas pour choisir l'écartement convenable, puis placer sa pointe au point choisi comme centre, prouvent qu'il n'a peut-être pas perçu que ce point était le milieu du côté [AB] du carré ABCD.

Question 4.
Objectif prioritaire : Les messages des élèves de CE2 laissent à penser qu'ils savent reconnaître et construire un carré ou un rectangle. Ils ne semblent pas par contre maîtriser le vocabulaire attaché à la description d'un cercle, non plus que de ses caractéristiques (centre, rayon ou diamètre) : Aucun de ces deux élèves n'emploie les mots « cercle », « centre » ou «rayon », ni ne donne la mesure de l'écartement à donner au compas pour tracer une telle figure. Un effort particulier doit donc apporté à l'étude du cercle.
Commentaire : Pour l'élève A, un retour sur la notion de longueur des côtés d'un rectangle ou d'un carré pourrait ne pas être inutile, car les notions de longueur et largeur semblent être fortement imprégnées de considérations spatiales et non

géométriques (« *6 cm de long et 6 cm de large* .») Pour l'élève B, l'orientation du carré ABCD dans la feuille (ses côtés ne sont pas parallèles aux bords de la feuille) a pu être un obstacle à la reconnaissance d'un carré. La reconnaissance de ces polygones n'est peut-être pas totalement acquise.

SECOND VOLET (8 POINTS)

1. Résolution de problème « les aimants »

Il s'agit de déterminer tous les couples d'entiers naturels (a, b) vérifiant l'égalité :
4a + 6 b = 36
soit pour b fixé : a = ¼ (36 – 6 b)
si b = 0 alors a = 9
si b = 1 b n'est pas un entier naturel
si b = 2 alors a = 6
si b = 3 b n'est pas un entier naturel
si b = 4 alors b = 3
si b = 5 b n'est pas un entier naturel
si b = 6 alors b = 0

L'ensemble des solutions est donc S = {(0,9), (2, 6), (4, 3), (6,0)}

2. Analyse comparative des activités proposées dans les deux documents

Question 1.
Les deux documents proposent aux élèves de résoudre un problème d'arithmétique faisant intervenir des multiplications et des additions dans N. Dans les deux cas, les élèves doivent faire des essais, contrôler leurs résultats en tenant compte des contraintes de l'énoncé et organiser leur recherche afin de déterminer plusieurs (ou toutes les) solutions du problème.

Le document A porte plus particulièrement sur la recherche des solutions dans N d'une équation du premier degré à deux inconnues. Les élèves doivent tenir compte des contraintes spécifiques de la situation : utiliser tous les aimants une fois et une seule. Ils doivent élaborer une procédure de résolution complexe sans indication d'étape intermédiaire.

Le document B s'inscrit dans le cadre des structures multiplicatives ; il s'agit de déterminer le cardinal d'un produit cartésien de 2 puis de 3 ensembles. Un des objectifs poursuivis semble être la mobilisation d'outils spécifiques : tableau à double entrée mais aussi et plus particulièrement représentation « en arbre » du produit cartésien. Pour résoudre ce problème, les élèves doivent aussi être capables d'interpréter ces représentations en terme de produit. Il s'agit enfin d'une recherche exhaustive.

Question 2.
Compte tenu des déroulements proposés dans les livres du maître correspondants, l'exercice du document A n°1 est une activité de recherche ; il s'agit apparemment d'une première rencontre avec ce type de problème.
L'exercice du document B n°1 a un objectif de réinvestissement individuel de procédures élaborées collectivement dans une activité précédente.

Question 3.
Les séances proposées ne sont pas construites selon les mêmes modèles d'apprentissage. Le déroulement proposé par le ERMEL vise à confronter les élèves à une situation-problème, à les faire explorer seuls certaines démarches, à confronter les procédures de résolution dans une phase de mise en commun ayant notamment pour but d'aider les élèves en difficulté. Le maître n'a pas a priori à apporter des éléments de solution. Les élèves sont directement confrontés à l'énoncé le plus général du problème. Enfin, la phase de réinvestissement n'est pas constituée d'une simple reproduction de stratégies préalablement explorées mais vise à les mobiliser pour résoudre d'autres questions (résolution de cas particuliers.)

Par contre, le document B propose un déroulement basé sur une autre démarche pédagogique : passage du simple au compliqué (produit cartésien de 2 puis 3 ensembles, 2 de ces trois ensembles étant constitués des 2 ensembles précédents), mise en place d'un étayage guidant les élèves vers l'utilisation de certains outils (utilisation d'un matériel pouvant induire une disposition en tableau des résultats, consigne intermédiaire demandant d'organiser en tableau les résultats trouvés), réinvestissement dans une tâche strictement isomorphe à la précédente.
Nous sommes donc en présence d'une stratégie qui prévoit dès le début des aides apportées directement ou indirectement par le maître et qui donc réduit la complexité de la tâche à effectuer par l'élève. Il n'a plus à produire une solution nouvelle, mais seulement à réutiliser une procédure précédemment identifiée.

Nous pouvons donc conclure cette comparaison en émettant l'hypothèse que le scénario proposé par le document A favorise davantage l'implication des élèves si du moins les difficultés non surmontées par des élèves lors de la recherche individuelle sont levées par les mises en commun et si « une masse critique » d'élèves résout au moins partiellement le problème (en mobilisant des procédures de calcul) lors de la phase de recherche individuelle.

3. Analyse du déroulement de l'activité décrite dans l'étape 2 de la page A n°2

Question 1.
Les rédacteurs du scénario avaient deux solutions : travail individuel ou travail en (petits) groupes. La première solution permet d'évaluer les productions et démarches de chaque élève mais risque de laisser apparaître des blocages individuels. La seconde forme de travail, si elle évite en partie cet inconvénient et si par un premier filtre contribue à enrichir les productions collectives des élèves, peut par contre, réduire l'éventail des stratégies et éventuellement cacher certaines difficultés individuelles.

Le choix d'une recherche individuelle peut donc se justifier.

Question 2.
On peut envisager une procédure évitant le calcul et basée sur le dessin des affichages : par exemple dessin de quelques petites images et des aimants correspondants, puis dessin de grandes images afin d'utiliser le reliquat d'aimants, ces dessins étant suivis éventuellement d'adaptations en fonction des résultats obtenus. Une autre variante de cette stratégie peut être le dessin préalable d'un nombre largement suffisant de petites et grandes affiches suivi d'un « travail par essai » sur celles-ci.

On peut penser à une procédure de même type mais ne recourant pas aux dessins : par exemple

1 petite	1 petite	1 petite	1 petite	
4	4	4	4	
		16 il reste 36 – 16 = 20 aimants		

1 grande	1 grande	1 grande
6	6	6

il reste 2 aimants

donc deux grandes, il reste 8 aimants soit deux petites images…

Question 3.
Voici une autre procédure possible :
- détermination simultanée des totaux partiels et du nombre d'aimants utilisés pour afficher les images de différentes tailles
- sommation des résultats partiels ainsi obtenus afin d'atteindre le « but » 36.

La première étape pouvant être réalisée à l'aide de multiplications (moins probable en CE1) ou d'additions réitérées :

Petites images			Grandes images
1	4	1	6
2	8	2	12
3	12	3	18
4	16	4	24
5	20	5	30
6	24	6	36
7	28		
8	32		
9	36		

20 et 18 non
16 et 24 non
24 et 12, 36 oui…

on peut aussi penser à un calcul du type essais et erreurs et évaluation de l'écart au but

1 et 1 : 4 + 6 = 10 trop petit
2 et 2 : 4 + 4 + 6 + 6 = 8 + 12 = 20 trop petit
3 et 3 : 4 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 = 12 + 18 = 30 trop petit
4 et 4 : 4 + 4 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 + 6 = 16 + 24 = 40 trop grand
4 et 3 : 4 + 4 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 = 16 + 18 = 34 trop petit
5 et 3 : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 6 + 6 + 6 = 20 + 18 = 38 trop grand
5 et 2 : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 6 + 6 = 20 + 12 = 32 trop petit
6 et 2 : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 6 + 6 = 24 + 12 = 36 oui

on peut aussi penser à un calcul partant d'une solution optimale ne faisant intervenir qu'un seul type d'images et intégrant par essais et erreurs l'autre type.
9 petites : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 36
8 petites, 1 grande : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 6 = 38 trop grand
7 petites, 1 grande : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 6 = 34 trop petit
7 petites, 2 grandes : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 6+ 6= 40 trop grand
6 petites, 2 grandes : 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 6+ 6= 36 oui

On peut penser aussi à une procédure de calcul par étapes : détermination d'un résultat partiel puis détermination dans un second temps d'une « configuration » permettant d'utiliser le reliquat avec, en cas d'impossibilité, retour à la première étape.

Exemple : 4 petites, 2 grandes : 4 +4 + 4 +4 + 6 + 6 = 16 + 12 = 28
36 – 28 = 8
4 + 4 = 8 soit 2 petites images
donc au total : 6 petites et deux grandes.

4. Prolongement

On peut envisager un autre exercice qui propose un but impossible à atteindre mais dont on peut se rapprocher, par exemple : même nombre d'aimants par affiche, même type d'affiche mais nombre total d'aimants égal à 35. Cela permet de proposer un problème ayant pour solution une valeur approchée d'une des données.

MARTINIQUE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

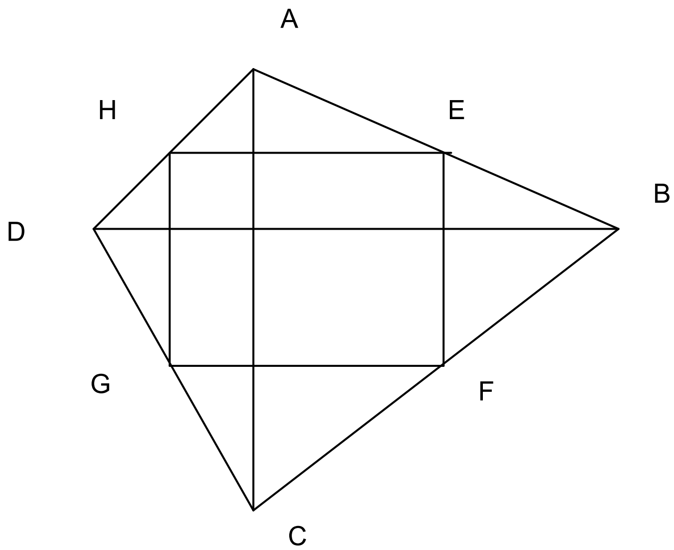
EXERCICE 1 (5,5 points)

Rappel : convexe se dit d'une partie du plan ou de l'espace telle que tout segment ayant ses extrémités dans cette partie y est entièrement inclus.

Question 1 :
Question 1.a : Faux, les rectangles non carrés n'ont pas des diagonales perpendiculaires.

Question 1.b : Vrai, les carrés sont des parallélogrammes et appartiennent à (F).

Question 2 :



Question 2 .1.
Considérons le triangle ADB, H et E étant les milieux respectifs des côtés AB et AD, la droite (HE) est parallèle à la droite (DB) (théorème de la droite des milieux) et on a l'égalité :

HE = $\frac{1}{2}$ DB.

Un raisonnement analogue appliqué respectivement aux triangles DBC, ADC et ABC montre que :

(GF) est parallèle à (DB) ; GF = $\frac{1}{2}$ DB

(HG) est parallèle à (AC) ; HG = $\frac{1}{2}$ AC

(EF) est parallèle à (AC) ; EF = $\frac{1}{2}$ AC

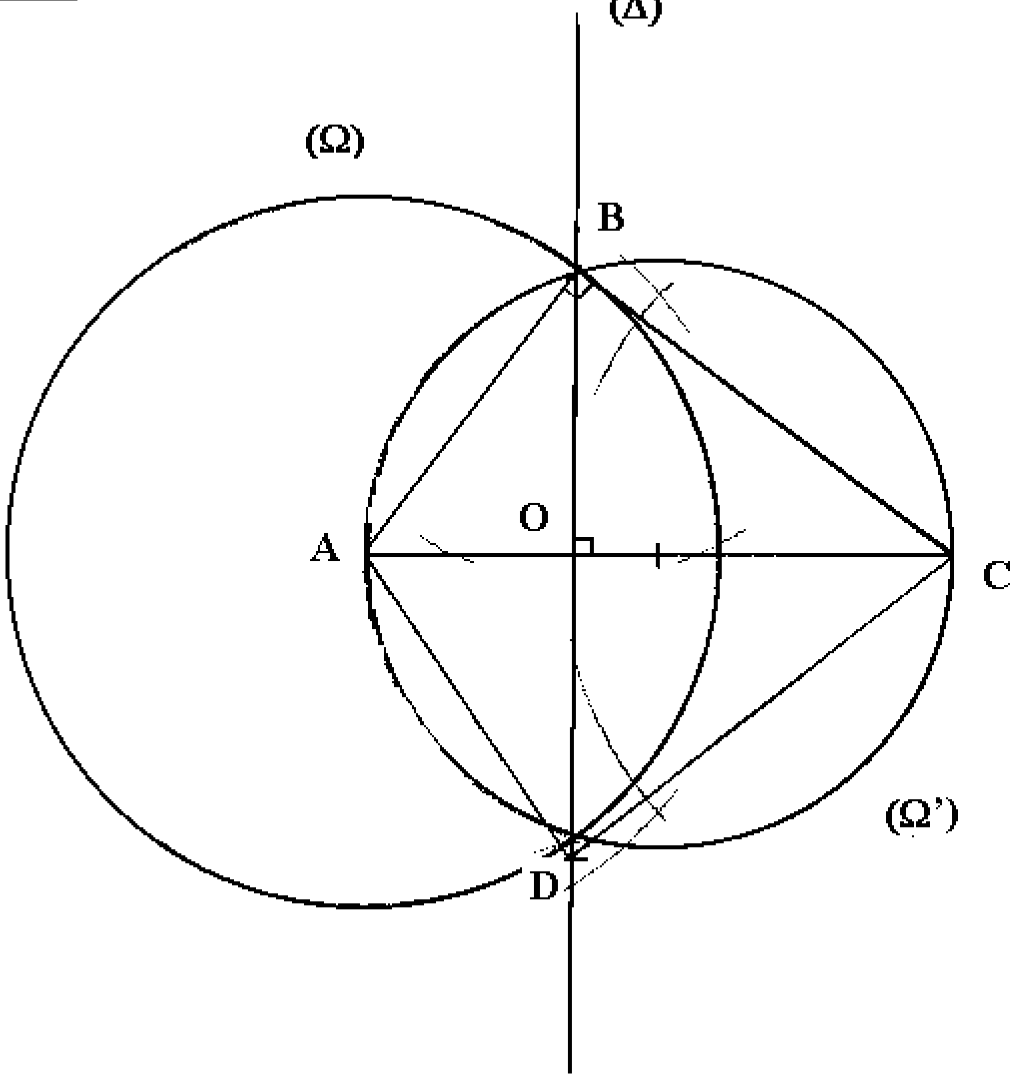
Ainsi le quadrilatère HGFE a ses côtés parallèles et égaux deux à deux, **c'est un parallélogramme**. Comme les droite (DB) et (AC) sont perpendiculaires, les angles du parallélogramme HEFG sont droits. **C'est donc un rectangle**.

Question 2 .2.
EFGH est un carré s'il possède deux côtés consécutifs égaux. C'est le cas d'après 2.1. si AC = DB. Il est donc suffisant que les diagonales aient même mesure.

Question 3 :
Question 3.1.
Question 3.1.a. voir figure 1 ci-dessous.
- tracer un segment [AC] de longueur 10 cm,
- soient (Ω) le cercle de centre A et de rayon 6 cm et (Ω') le cercle de diamètre [AC], soit B un point d'intersection de (Ω) et (Ω'). Le triangle ABC étant inscriptible, par construction, dans le demi-cercle de diamètre [AC], il est rectangle en B.
- tracer la perpendiculaire (Δ) à [AC] passant par B,
- soit D le point de (Δ') appartenant au demi-plan de frontière (AC) ne contenant pas B et tel que : DB = 10 cm.

Le quadrilatère ABCD répond aux contraintes de l'énoncé.

Figure 1



Question 3.1.b.

Calcul de BC : D'après le théorème de Pythagore, nous avons :

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$6^2 + BC^2 = 10^2$

$BC^2 = 100 - 36 = 64 = 8^2$

BC = 8 cm

Calcul de OB : [OB] étant la hauteur issue de B du triangle rectangle ABC, on a :

$OB^2 = AB.BC$

$OB^2 = 6 \times 8 = 48$

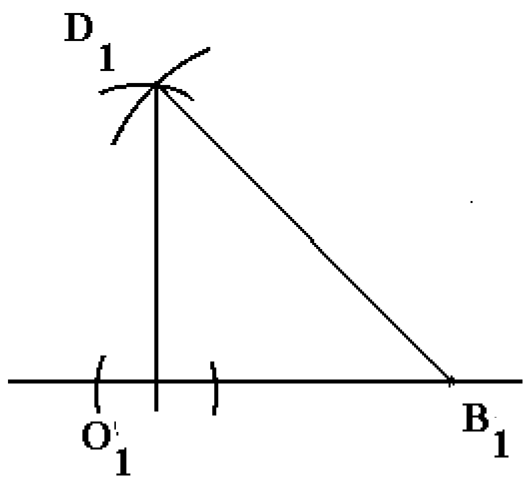
$OB = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$

Question 3.2.

Question 3.2.a : si [OB] est la hauteur du tétraèdre abaissée sur la base ACD, alors (OB), étant perpendiculaire au plan passant par A, C et D, est orthogonale à toute

droite de ce plan. (OD) étant une telle droite, (OB) et (OD) sont perpendiculaires. **Le triangle ODB est donc rectangle en B**.
DB est donc l'hypoténuse du triangle rectangle ODB.
Pour construire en vraie grandeur l'arête [BD], il suffit donc de construire deux segments perpendiculaires O_1B_1 et O_1D_1 de longueur OB et OD et de tracer $[B_1D_1]$ ainsi B_1D_1 = BD d'après ci-dessus. (voir figure 2)

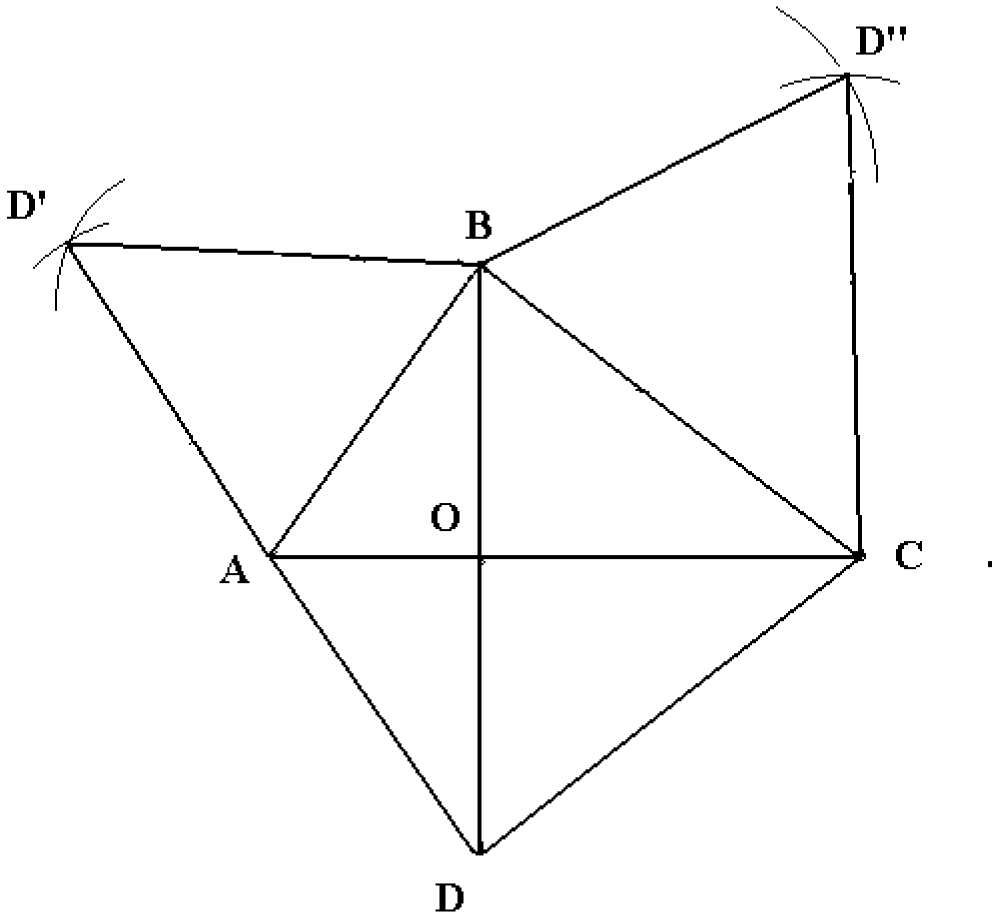
figure 2



Question 3.2.b : voir figure 3

Il reste à construire les deux autres faces ABD' et BCD'' du tétraèdre.
Tracé de la face ABD' : D' est à l'intersection des cercles de centre A et de rayon AD et de centre B et de rayon B'D' (figure 2). Il est situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas D.
Tracé de la face BCD'' : c'est un triangle de côtés [BC], [BD''] et [D''C] tels que :
BD'' = BD = BD'
D''C = DC
Le point D'' est donc à l'intersection des cercles de centre B et de rayon BD' et de centre C et de rayon DC ; D'' est situé dans le demi-plan de frontière (BC) ne contenant pas D.

figure 3



EXERCICE 2 (2,5 points)

Question 1 :
Appelons M, T et S les valeurs respectives de la maison, du terrain et de la somme d'argent, nous avons :

M + T + S = 2 100 000 (i)
M + T = 1,5 x S (ii)
T = 0,8 M (iii)

De (i) et (ii) nous déduisons que :
1,5 S + S = 2 100 000 donc 2,5 S = 2 100 000 donc
S = 840 000

(ii) devient :
M + T = 1,5 x 840 000 = 126 000
Soit donc :
M + 0,8 M = 126 000
1,8 M = 126 000
M = 700 000

D'après (iii) , on a :

T = 0,8 x 700 000 = 560 000

Vérification : 560 000 + 700 000 + 840 000 = 2 100 000

Question 2 :
(Par commoditié, nous appelons A, B et C les sommes relatives aux personnes A, B et C).
A, B et C étant respectivement proportionnels à 28, 24 et 18, nous avons l'égalité de rapport :

$$\frac{A}{28} = \frac{B}{24} = \frac{C}{18} = \frac{A+B+C}{28+24+18} = \frac{A+B+C}{70} = \frac{2\,100\,000}{70} = 30\,000$$

Nous en déduisons que la valeur de l'héritage de chacun est :
A = 28 x 30 000 = 840 000
B = 24 x 30 000 = 720 000
C = 18 x 30 000 = 540 000
Vérification : 840 000 + 720 000 + 540 000 = 2 100 000

Question 3 :
Compte tenu des valeurs du terrain, de la maison et de la somme d'argent en dépôt, on pourrait proposer le partage suivant :
Une solution de partage possible peut être d'affecter le terrain et la maison à deux héritiers et de compléter avec l'argent en dépôt

Héritiers	Terrain	Maison	Somme en complément	solde
A		700 000	140 000	840 000
B	560 000		160 000	720 000
C			540 000	540 000
Total			840 000	2 100 000

Il existe évidemment d'autres solutions plus complexes à gérer…

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

QUESTION 1 :

Avant de répondre à cette question, analysons la tâche proposée à l'élève :
celui-ci doit lire une phrase et faire le lien avec les deux dessins.
Dans les deux dessins, l'élève doit reconnaître qu'il s'agit du même « Frank ».
L'élève doit savoir interpréter les informations :

- « Marc en bas » comme « Marc plus lourd que Frank »
- « Frank en bas » comme « Frank plus lourd que Julie ».

Puis lier ces deux informations :

- SI (« Marc plus lourd que Frank » ET « Frank plus lourd que Julie ») ALORS du plus léger au plus lourd : « Julie, puis Frank, puis Marc ».
- Enfin écrire les trois prénoms dans les cases situées sous les dessins.

Les compétences essentielles requises pour résoudre le problème :

- Compétences de lecture de consigne et de dessin.
- Transformer une information visuelle en utilisant une relation binaire (« est plus lourd que »).
- Transformer la relation « est plus lourd que » en la relation « est plus léger que ».

Remarque : on peut répondre à la consigne sans explicitement avoir à déclarer que Julie est plus légère que Marc. (La transitivité n'est pas explicitement requise).

QUESTION 2 :
Les principales sources d'erreurs sont :

- Mauvaise lecture par incompréhension de l'information portée par les images :
  - Le personnage de Frank est-il le même ?
  - « être en bas » signifie-t-il que l'enfant est plus lourd ?
- En rester au rangement du plus lourd au plus léger.
- Difficulté à comprendre le rôle des trois cases figurant sous les dessins.
- La lecture des dessins est également une difficulté car elle peut nécessiter une inversion des relations. Ainsi la comparaison est plus difficile si le premier dessin est traduit par *« Frank est plus léger que Marc »* et le second par « *Frank est plus lourd que Julie* ». Des activités de « conversion » des relations sont préalablement nécessaire.
- Enfin le décodage est rendu plus difficile car Frank n'occupe pas toujours la même place sur la balance. L'élève doit faire abstraction de la position du sujet et ne tenir compte que des positions relatives des enfants. Une activité consistant à faire prendre conscience de la cohérence de deux pesées de deux enfants occupant des places différentes sur la même balance doit permettre de lever cette difficulté.

Types d'activité :

- Jouer effectivement à ce jeu afin d'être sûr qu'il conduit à des déclarations exactes relatives aux poids des enfants.
- passer à une représentation après l'action, afin de s'assurer que ce type de dessin sera lu correctement. (Tout en sachant qu'à cet âge (CE1), la notion de masse n'est pas définitivement installée, qu'on a affaire ici à un obstacle de nature psycho-

génétique : (cf travaux de Piaget : la conservation des masses s'acquiert plus tard)).
- Construire un dispositif expérimental (balance Roberval et petits objets) qui permettrait, après avoir fait des prévisions, un retour à l'expérimentation afin de valider ou d'invalider.

QUESTION 3 :

Elève A :
On peut penser que cet élève a compris l'activité mais qu'il n'a pas été suffisamment attentif à la consigne : il a donc rangé du plus lourd au plus léger, inversant ainsi l'ordre attendu, uniquement parce que Marc est le premier enfant dessiné et donc le premier sujet intervenant dans les comparaisons.
- Il est aussi possible que l'élève ait seulement recopié dans l'ordre d'apparition sur le dessin les 3 prénoms des enfants.
- Il peut aussi avoir recopié dans les deux premières cases ce qu'il voyait sur le premier dessin et mettre dans la troisième case « Julie » qui est « la plus légère » dans le deuxième dessin.
Si la première interprétation ne permet pas de douter des compétences de l'élève ayant produit cette réponse, les autres, en revanche, témoignent d'une réelle difficulté.

Elève B :
On peut raisonnablement faire l'hypothèse que l'élève B a vu que Frank était plus léger que Marc et qu'il l'écrit sous le dessin, puis que Julie était plus légère que Frank : il l'écrit dans la deuxième case. La troisième case est alors dévolue, par élimination, à Marc.
La source de l'erreur peut venir d'une impossibilité à reconstruire une information à partir des deux informations élémentaires dans cette relation d'ordre, mais aussi tout simplement de la disposition des cases sous le dessin.

Elève C :
Plus difficile à interpréter.
Sans doute, cet élève examine le cas de Julie et conclut qu'elle est la plus légère. Il commet ensuite une erreur de rangement entre les deux autres enfants.

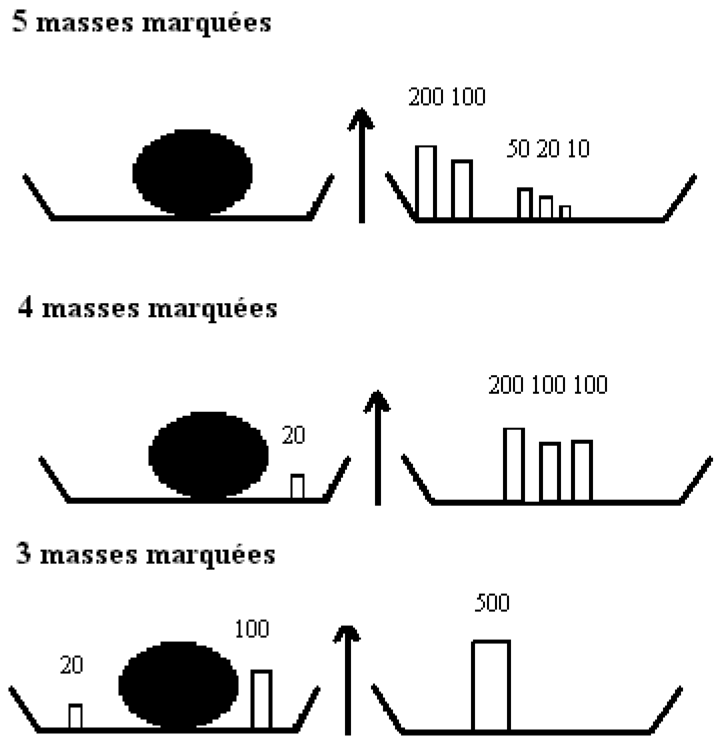
On peut imaginer d'autres interprétations qui pourraient être validées ou invalidées en ayant observé comment l'élève remplit les cases. L'erreur peut être aussi due à la place occupée par Frank dans le second dessin. Perdu dans la comparaison indirecte, l'élève a pu se laisser influencer par le fait que Frank est dessiné en dernier.

Commentaires : on ne peut évidemment exclure une réponse aléatoire des élèves mais ce type d'explication n'est en général pas attendu par les correcteurs.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question 1.

Voici un schéma présentant les 3 pesées :



Question 2.

Le premier exercice a pour objectif d'amener l'élève à évaluer un ordre de grandeur de la masse d'objets de la vie courante.
L'exercice n°2 a pour objectif d'évaluer la connaissance des relations liant les différentes unités et sous-unités de masse de notre système ainsi que la compétence à convertir une masse exprimée en une unité dans une autre.

Question 3.

Question 3.a.

La présentation de cet exercice n'est pas standard. En effet la coutume scolaire veut que l'on n'écrive qu'un seul chiffre par colonne dans un tableau de conversion d'un système d'unités d'une grandeur simple[2].
Les auteurs ne respectent pas, sans doute volontairement, cette norme. Cela risque peut-être d'introduire une confusion chez certains élèves. En effet, ils peuvent être déroutés par cette présentation qui contredit les habitus scolaires. Ils peuvent aussi ne plus savoir quand il faut respecter la règle « classique » ou non. Mais, en même temps, cela peut révéler une pratique vide de sens qui consiste à remplir des tableaux sans avoir compris les règles de conversion.

Question 3.b. Une autre présentation plus conventionnelle pourrait être :
Convertis systématiquement en kg, hg, dag, g les masses suivantes :
4 kg
170 hg
6000 g
100 dag

Convertis systématiquement en g, dg, cg, mg les masses suivantes :
20 dg
7000 mg
4200 cg
3 g

Question 4 :

Pour résoudre cet exercice, l'élève doit savoir décomposer un nombre donné en la somme ou la différence d'un ou plusieurs nombres donnés et traduire cette décomposition en interprétant les schémas proposés, par exemple :
580 = 500 + 100 – (10 + 10)
373 = (500 + 2) – (100 + 10 +10 + 5)

Question 5 :
Question 5.a.
Cet exercice comme le précédent a pour but de traduire l'expression d'une masse donnée par une somme de masses à choisir parmi un lot fixé à l'avance.
Outre les difficultés liées à la mobilisation des connaissances arithmétiques et celles liées à la mesure nécessaires pour résoudre le problème, les autres difficultés sont liées à la présentation de l'exercice. Les premières sont liées à la maîtrise de la décomposition d'un nombre traduisant une masse exprimée en gramme et kilogrammes en une somme ou produit de masses exprimées dans les mêmes unités. D'autres sont liées au tri des données de la situation.
L'élève doit aussi interpréter les contraintes de l'activité.
Peut-on choisir plus de 2 disques de 25 kg par exemple ou bien doit-on utiliser les seuls disques dessinés ?
L'élève doit tenir compte du poids de la barre et donc décomposer 157,5 kg et non 182,5 kg
L'interprétation de cette contrainte change la tâche de l'élève.

[2] Au sens de Gérard Vergnaud

Dans le premier cas, une réponse possible est : 6 x 25 + 5 + 2,5
Dans le second cas, une réponse possible est :
2 x 25 + 2 x 20 + 2 x 15 + 2 x 10 + 2 x 5 + 3 + 2 + 1 + 1,25 + 0,25
Le tri des données utiles est nettement plus complexe dans le second cas. Les calculs sont également plus longs.

Question 5b :

Les compétences essentielles pour résoudre ce problème sont exposées ci-dessus : savoir décomposer une masse en somme de masses en respectant certaines contraintes, décomposer un problème en sous-problèmes, trier les données nécessaires, savoir additionner des masses exprimées en kg et g.

Question 6 :

Le poids du chargement de Denis est :
11 kg + 2 kg + 2 kg 500 g + 3 x 250 g + 500 g + 2 x 100 g + 200 g + 100 g + 2 x 5 g =
15 kg + 2 kg 260 g =
17 kg 260 g

Même s'il peut-être délicat a priori de déterminer parmi les variables de la situation proposée, celles qui seront didactiques, on peut penser que des changements de valeurs de certaines peuvent avoir un effet sur les performances et productions des élèves. Il en est ainsi sans doute :
- du choix de ne pas atteindre le poids limite.
- de ne pas donner de contraintes quant aux charges à rajouter. L'élève doit-il choisir dans le lot d'ingrédients présentés (ce qui est vraisemblable) ou peut-il en inventer ?
- de donner des masses exprimées en kg, en g ou encore en g et kg.
- de présenter la situation à l'aide d'un dessin organisant presque par ordre croissant les masses à ajouter. L'élève qui effectue les calculs en suivant l'ordre de présentation du dessin peut rencontrer certaines difficultés qui auraient pu être évitées par une autre organisation des calculs.

Question 7 :

Cet aide-mémoire pourrait comporter des rappels sur :
- les règles de conversion des unités de masses.
- des techniques de calculs de sommes et différences de masses exprimées en kg, g, kg et g.
- diverses techniques d'utilisation d'une balance à double plateau et d'une boîte de masses marquées.

RENNES

PREMIER VOLET (12 POINTS)

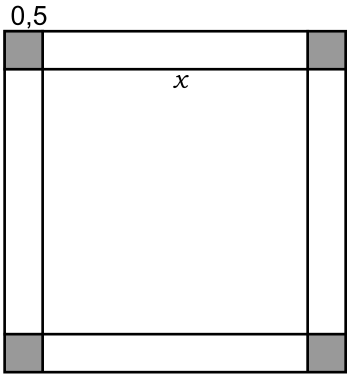
PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :

1) vérification du fait que 3 soit solution de l'équation $x^2 + 10x = 39$:

Nous calculons l'expression $x^2 + 10x$ pour la valeur de x égale à 3 soit
$x^2 + 10x = 3^2 + 10 \times 3 = 9 + 30 = 39$
L'**expression** $x^2 + 10x$ **vaut bien 39 pour x = 3 qui est donc solution de l'équation considérée**.

2) un raisonnement pour $x^2 + 2x = 24$ s'appuyant sur une représentation :



Remarque : la représentation proposée n'est pas à l'échelle car au départ les dimensions du carré central ne sont pas connues.

L'aire du carré central est x^2.
L'aire d'un rectangle est 0,5 x et l'aire des 4 rectangles est 2 x. L'aire du carré central et des 4 rectangles est donc $x^2 + 2x$ qui est égal à 24 d'après l'équation.

L'aire des quatre carrés grisés de coin est $4 \times (0{,}5)^2 = 1$ et l'aire du grand carré est donc 24 + 1 = 25. Le côté du grand carré mesure donc :
$\sqrt{25} = 5$. Et x est alors solution de l'équation $x + 2 \times 0{,}5 = 5$ soit $x + 1 = 5$ et **x = 4.**

Vérifions que 4 est bien solution de l'équation $x^2 + 2x = 24$:
$4^2 + 2 \times 4 = 16 + 8$ qui vaut bien 24.

3) La suite des calculs permettant de calculer une solution de $x^2 + 5x = 84$ est :

$5 : 4 = 1{,}25$
$4 \times (1{,}25)^2 = 6{,}25$
$84 + 6{,}25 = 90{,}25$
$\sqrt{90{,}25} = 9{,}5$
$9{,}5 - 2 \times 1{,}25 = 7$
7 est la valeur recherchée.
Et 7 est bien solution de l'équation $x^2 + 5x = 84$ car $7^2 + 5 \times 7 = 49 + 35 = 84$

4) Description en langage courant :

Pour l'équation <u>$x^2 + ax = b$</u> la succession des calculs est la suivante :

a :4 ; $4 \times (\frac{a}{4})^2 = n$; $b + n = m$ $\sqrt{m} = c$; $c - 2x\frac{a}{4}$ est la valeur recherchée.

Cette succession peut se traduire en langage courant par :

Diviser a par 4 : l'on obtient un premier nombre, calculer 4 fois la valeur du carré de ce premier nombre : c'est le deuxième nombre. Ajouter ce deuxième nombre à b pour obtenir un troisième nombre. Prendre la racine carrée de ce troisième nombre : c'est le quatrième nombre. La valeur recherchée est obtenue en retranchant 2 fois le premier nombre au quatrième.

EXERCICE 2:

1) <u>Capacité de la cuve</u>

a) capacité exacte en m^3

L'aire du disque de rayon r est égale à π r^2 or r = 1 m et la capacité exacte de la cuve cylindrique de hauteur 3,6 m est donc de :

$\boxed{\mathbf{V = 3,6 \times \pi\ m^3}}$

b) Choix de π :

on a :

3,1415 < π < 3,1416   11, 30**94** < 3,6π < 11,30**976**

3,141 < π < 3,142   11,307 < 3,6π < 11,311

La valeur de π est à choisir à au moins 10^{-4} près par défaut car le choix de la valeur de π à 10^{-3} près par défaut ne permet pas d'obtenir la capacité au litre près par défaut (la quatrième décimale de π du fait de sa valeur 5 devient significative dans la multiplication par 3,6)

$\boxed{\mathbf{V \cong 11309\ litres}}$

<u>2) Volume de fuel pour 50 cm de jauge</u>

a) Valeur de α correspondante

Les longueurs sont exprimées en mètres. La jauge mesurant 50cm, alors :

$OH = \frac{1}{2}$ (car OH = OB - HB avec OB = 1 - rayon de la cuve et BH = 0,5 - hauteur de la jauge) et OA = 1 ainsi :

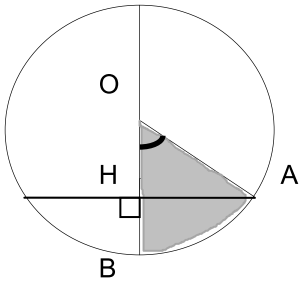
$\text{Cos}\alpha = \frac{OH}{OA} = \frac{1}{2}$ d'où $\alpha = 60°$ **(l'angle de 60 ° est obtenu par lecture du tableau)**

b) Aire, en m^2, du secteur circulaire BOA

L'angle étant de 60°, l'aire du secteur angulaire est le $\frac{1}{6}$ (rapport entre 360 et 60) de l'aire du disque (déterminant le cylindre) qui vaut π m^2

d'où $\boxed{\mathbf{A_{50} = \frac{\pi}{6}\ m^2}}$

c) quantité exacte de fuel en m^3 pour une jauge indiquant un niveau de 50 cm.



Nous calculons tout d'abord l'aire du secteur BHA : différence entre les aires du secteur angulaire BOA (calculée à la question b) et du triangle rectangle OHA

.

* Calcul de l'aire du triangle rectangle OHA noté A_T

$A_T = \dfrac{OHxAH}{2}$ (aire d'un demi-rectangle) avec AH = $\sin 60° \times OA = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(car OA =1) et OH = $\dfrac{1}{2}$ d'où $A_T = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ m^2

* Le volume recherché est obtenu par le double du produit de l'aire du secteur BHA par la longueur de la cuve (cylindre de base le secteur BHA et de hauteur la longueur de la cuve)

ainsi : $V = 2 \times 3{,}6 \times (A_{50} - A_T) = 2 \times 3{,}6 \times (\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}) = 3{,}6\ (\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4})$

$V = 3{,}6 \times \dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}$ soit $\boxed{\mathbf{V_{50} = 0{,}3\ (4\pi - 3\sqrt{3})\ m^3}}$

<u>Le volume au litre près par défaut est donc :</u>

$\boxed{V_{50} \cong 2211 \text{ litres}}$

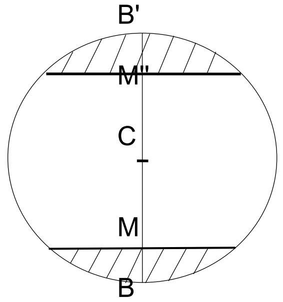
<u>3) tracé de la courbe *C*</u>

a) les données à utiliser sont celles de l'énoncé auxquelles on a ajouté la colonne 50 :

Hauteur du niveau en cm.	0	10	30	40	50	60	70	80	90	100
Volume de fuel arrondi au litre près par défaut.	0	210	1065	1608	2211	2853	3528	4224	4935	5655

voir courbe pages suivantes

b, complément de la courbe *C* sur l'intervalle de niveau [100, 200] :



La citerne admet un plan de symétrie : le plan horizontal passant par C.(centre du disque définissant un fond de cuve transparent sur lequel est posé la jauge)
Considérons les points M et M' symétriques par rapport à C (CM = CM' ou BM = M'B') : ils correspondent à des hauteurs de jauge x_M et $x_{M'}$ (avec x_M = BM et $x_{M'}$ = BM' d'où $x_M + x_{M'}$ = BM + BM' = M'B' + BM' = 2 BC= 2 x_C)
et a des niveaux de fuel dans la cuve. Ces 2 niveaux sont également symétriques par rapport à C.
Soit V_M le volume de fuel correspondant à M et V_T le volume total de la cuve alors $V_{M'} = V_T - V_M$ (car les parties hachurées ont des aires égales) et $V_M + V_{M'} = 2 V_C$

Les deux relations : $x_M + x_{M'} = 2 x_C$ et $V_M + V_{M'} = 2 V_C$ traduisent que :

la courbe représentative est symétrique par rapport au point S de coordonnées (x_C,V_C) soit approximativement S(100 , 5655) .

Il est possible de le démontrer (non demandé) : O est l'origine du repère dans lequel a été tracé la moitié de la courbe représentative. ($x_M \in [0,100]$)

$\overrightarrow{OM}$ *(x_M , V_M) M' symétrique de M par rapport à C et* $\overrightarrow{OS}$ *(x_C , V_C)*
$\overrightarrow{OM'}$ *($x_{M'}$, $V_{M'}$)* $x_M + x_{M'} = 2 x_C$ *et* $V_M + V_{M'} = 2 V_C$

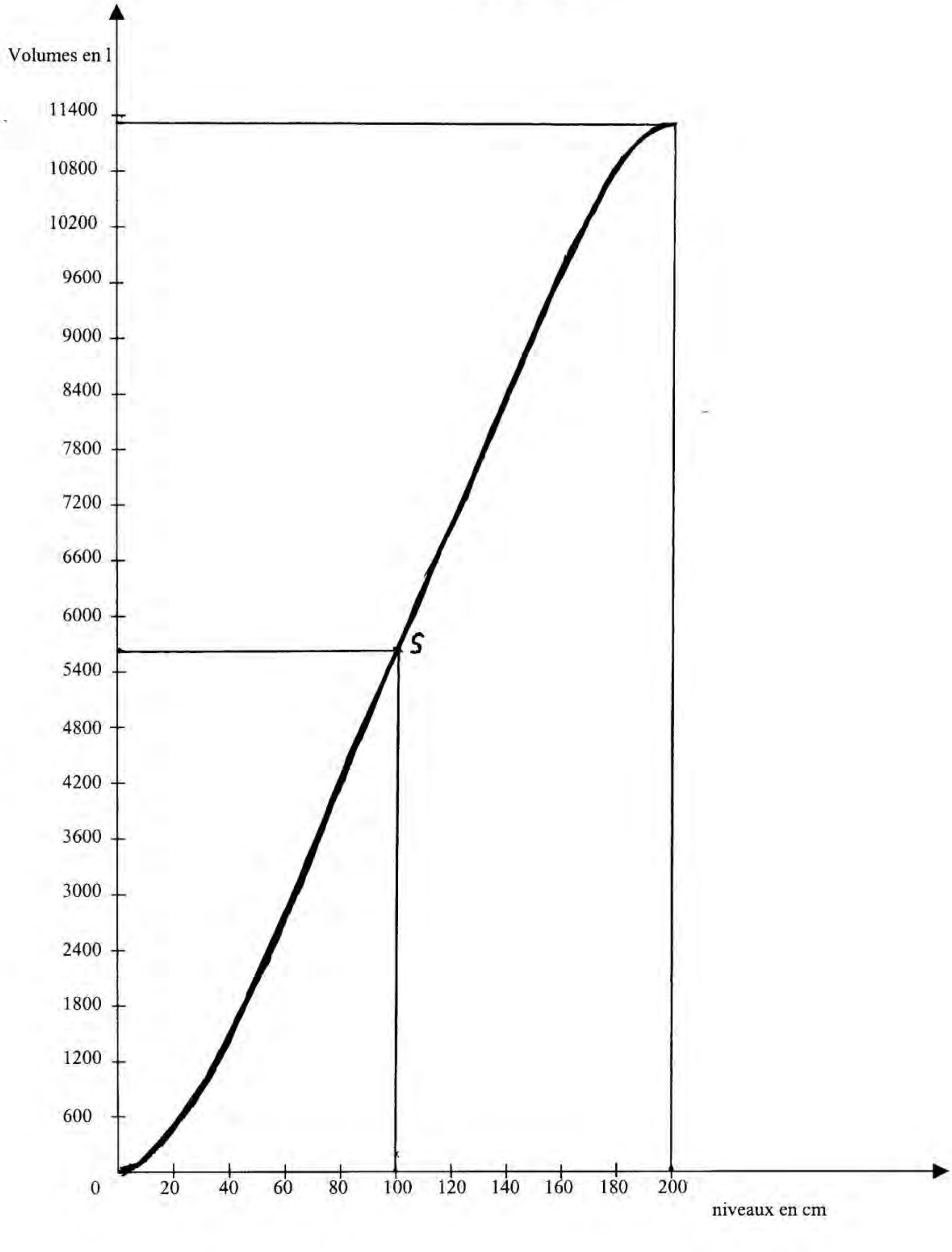
$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = 2\,\overrightarrow{OS}$ soit $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{SO} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{M'O}$

et $\boxed{\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{M'S}.}$ *ce qui traduit que les points M et M' sont symétriques par rapport à S.*

Description d'une construction géométrique permettant de compléter le tracé sur l'intervalle [100, 200]

Pour compléter la courbe, on utilise la propriété de la courbe mise en évidence : elle est symétrique de centre S.
M donné sur la portion de courbe déjà construite ($x_M \in [0,100]$) on construit le point M' tel que : M, S et M' alignés (utilisation de la **règle)** et MS = SM' (utilisation du **compas**).
La courbe peut être ainsi complétée de proche en proche.
ou
La symétrie centrale de centre S est aussi une rotation de centre S et d'angle 180°: il suffit donc à l'aide d'un **calque** de faire subir à la moitié de la courbe une telle rotation pour la compléter.

Courbe C



Volumes en l
11400
10800
10200
9600
9000
8400
7800
7200
6600
6000
5400
4800
4200
3600
3000
2400
1800
1200
600
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
niveaux en cm
S

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

A propos de la question 1

1) Analyses des réponses des élèves A et B

Il s'agit, pour les élèves, de calculer un écart entre deux nombres.

élève A :
Il utilise la technique de "l'addition à trous" et donne la réponse correcte 3 en reprenant le libellé de la question en conformité avec l'écriture en ligne de son opération.
élève B :
S'apercevant de son erreur, l'élève semble avoir abandonné la technique opératoire "traditionnelle" de la soustraction (erreur classique 21-18 = 17 le 7 étant la différence entre 8 et 1) pour donner la réponse correcte 3 obtenue par un autre moyen.
Sa phrase réponse est, elle aussi, correcte : elle est en accord avec la soustraction posée en ligne et ne reprend pas la formulation de la question.

2) Explication de la réponse de l'élève C

L'opération :
L'élève effectue correctement une addition des deux nombres du texte en la posant de façon traditionnelle, il est sans doute piégé par la formulation de la question : "combien ...de plus..". Ce résultat n'est pas la bonne réponse à la question posée.

La phrase réponse fournie est, quant à elle, correcte : l'élève n'a pas tenu compte du résultat de son addition, il a probablement calculé mentalement l'écart demandé.

A propos des questions 4 et 5

3) Classement des travaux des élèves D, E, F, G, H et I

Il s'agit, pour les élèves, de rechercher le quotient euclidien dans deux situations de division.
Les classes sont hiérarchisées : des procédures utilisant le dessin vers l'utilisation de techniques opératoires (addition, multiplication et division) ordonnées comme lors de leur enseignement à l'école primaire.

Groupements	D et G	F	I et H	E
Procédures	représentations	addition	multiplication	division et représentation

Elèves D et G : ils s'appuient uniquement sur des **représentations de la situation** (un dessin, une croix ou un rond symbolisant chacune des fleurs) pour fournir des réponses correctes aux questions posées.

Elève F : l'élève utilise, avec succès, une **technique d'addition itérée**.
Les deux résultats correspondent, respectivement, aux nombres de termes des deux additions. L'élève n'a pas réalisé d'essais : cela laisse supposer que ces additions ont été calculées mentalement de proche en proche.

Elève I : les réponses attendues sont exactes. Les **écritures multiplicatives et additives** utilisées par l'élève montrent que celui-ci a certainement cherché à "approcher au plus près" par les multiples de 5 les nombres en jeu puis a ajusté ces multiples en complétant par une addition. L'élève utilise, de façon erronée, deux signes "=" qui se suivent.

Elève H : seule la première réponse est exacte. Dans les deux recherches, l'élève traduit à bon escient la situation par une écriture mixte (mêlant **multiplication et addition** avec la priorité en usage) correcte. Il semble s'être aidé en posant en colonne ses calculs. L'erreur dans la deuxième phrase réponse est peut-être due à une étourderie.

Elève E : les deux phrases réponses sont exactes. Dans les deux situations, l'élève utilise mal la **technique opératoire de la division euclidienne**.
Première situation : le quotient euclidien et le reste sont bien trouvés mais le rôle de la soustraction intermédiaire n'est pas compris. L'écriture utilisant les ":" est erronée car
21 : 5 = 4,2.
Seconde situation : l'élève abandonne la technique usuelle pour revenir à une représentation de la situation qui lui permet de donner la bonne réponse.

4) <u>la notion commune</u>
Tous les élèves semblent avoir dominé **le sens** de ces deux situations de **division-quotition** (recherche du nombre de parts dans un partage équitable d'objets insécables).

5) <u>Analyse de la production de E</u>
L'élève E essaie d'utiliser une procédure classique de division euclidienne pour résoudre chacune des situations. Cela prouve qu'il a reconnu une situation de division.

Cet élève se montre également capable de changer de stratégie de résolution.
Confronter aux difficultés techniques de la division euclidienne, il les surmonte en contrôlant mentalement[3] sa technique (première situation) ou en s'appuyant sur une représentation (seconde situation).

Analyse de la technique opératoire :
L'élève ne maîtrise pas la technique de la division euclidienne, il semble procéder ainsi :
* d'abord prise en charge des unités (comme pour les autres techniques)

roses rouges	roses blanches

[3] ce contrôle est rendu possible par le choix des nombres : dividende à deux chiffres et diviseur le nombre particulier 5.

21 **le 1** : **0** fois 5 il reste **1**	18 **le 8** : **1** fois 5 reste **3**

*puis dizaine abaissée et prise en charge du nouveau nombre

roses rouges	roses blanches
21: **4** fois 5 reste **1**	**13** : **2** fois 5 reste[4] ?

Cela le conduit à une réponse juste dans le cas de la première situation. Dans le cas de la seconde situation, l'élève a remis en cause son résultat 12 et c'est pourquoi il a barré son opération.

SECOND VOLET (8 POINTS)

1) <u>objectif principal de la séquence :</u>

Il s'agit de faire travailler l'élève sur **l'un des aspects de la soustraction** - **le reste** - en l'entraînant à résoudre des situations de plus en plus complexes.

2) <u>deux compétences en mathématiques pré-requises :</u>

L'élève qui aborde cette fiche devra maîtriser :

- la numération car la compréhension de l'écriture des nombres lui permettra d'élaborer des méthodes de calcul des différences
- la représentation des nombres sous la forme d'une droite numérique graduée régulièrement car il s'agit d'une méthode de calcul qui lui est suggérée dans la fiche.

3) <u>avantages et inconvénients de la schématisation de la situation 1 :</u>

Les auteurs ont utilisé deux schémas associés pour représenter la situation.
Cela présente l'avantage de fournir à l'élève deux représentations de la situation mais cette surabondance de représentations peut avoir un inconvénient : le troubler inutilement.

Le schéma[5] de gauche est une traduction de l'énoncé du problème.
Ses avantages pourraient être les suivants :

- il fait coïncider les règles de la lecture du schéma (de gauche à droite) avec la chronologie des actions telles qu'elles apparaissent dans le texte du problème : avoir 150 F puis dépenser 40 F et avoir maintenant 110 F.
- il utilise un symbolisme différent pour différencier le rôle des nombres du texte : l'encadrement par des rectangles caractérise des états - un état initial dans le passé et un état final dans le présent -, l'encadrement par

[4] il est dommage que la production de l'élève soit coupée, si l'hypothèse émise était juste le nombre manquant aurait été 3.
[5] cette schématisation, issue des diagrammes sagittaux, est celle proposée par G. VERGNAUD dans sa catégorisation des problèmes additifs.

un ovale caractérise une transformation qui associée au symbole opératoire "-" signifie une diminution.

Son inconvénient majeur est de laisser à l'élève aucune action à effectuer : il doit se contenter de comprendre que le nombre 110 correspond à l'état de la tirelire de Marion après son achat de fleurs.

Le schéma de droite est une représentation de la situation sur la droite numérique.

Il a l'avantage de respecter la présentation habituelle de la droite numérique (ordre croissant des nombres de gauche à droite), ce qui facilite la vérification du bon placement des nombres 110 et 150 sous les graduations correspondantes.

Ses inconvénients sont les suivants :

- une représentation ordinale (nombres-repères) pour une situation mettant en jeu des quantités (nombres cardinaux)
- une lecture inversée par rapport au schéma de gauche qui est reproduit (à une symétrie près) et donc non conforme à la succession des actions.
- l'élève n'a toujours aucune action à effectuer.

Conclusion : une schématisation peu naturelle qui ne laisse aucune initiative à l'élève.

4) <u>sens privilégié :</u>

En utilisant la typologie que Vergnaud a établi dans le cadre de ses recherches sur les structures additives : il s'agit de rechercher l'état final d'une transformation connaissant l'état initial et la transformation négative associée. (Situation de type $E_i\ T^-\ E_f$)

C'est bien l'un des sens de la soustraction, mais il y en a d'autres.

<u>Une formulation sans mots inducteurs</u>

Nous pouvons[6] considérer que le texte utilise le mot inducteur "dépense" caractéristique d'un **retrait ou diminution,** et donc que ce mot prédéterminera[7] aux yeux de l'élève l'opération soustraction à effectuer entre les deux nombres du texte (le grand nombre le petit nombre).

Il s'agit donc, pour pallier à cet inconvénient, de proposer un nouveau texte qui n'utilise pas ce mot.

Marion avait 150 francs dans sa tirelire.

Elle vient d'acheter pour 40 francs de fleurs à sa maman. Combien a-t-elle d'argent maintenant?

5) <u>deux autres sens illustrés par un énoncé :</u>

Les sens manquants sont nombreux, nous aurions pu choisir deux autres exemples issus de la catégorie des transformations dans un contexte cardinal et qui restent donc très proches de l'aspect de la soustraction abordé par la fiche.

(Recherche de la situation initiale connaissant la situation finale et la transformation positive ou recherche de la transformation connaissant l'état initial et l'état final)

---

[6] en fait, le texte ne propose aucun des mots de la conclusion.

[7] il s'agit, en réalité, du but recherché par l'auteur de la fiche.

Nous préférons nous en éloigner en choisissant deux exemples issues d'une autre catégorie :

Composition d'états dans un contexte cardinal

Dans une classe de CE2, il y a 31 élèves : des filles et des garçons. Il y a 16 garçons. Combien y-a-t-il de filles?

Comparaison d'états dans un contexte ordinal

En se mesurant sous la toise, Paul atteint la graduation 138 et Pierre la graduation 152. De combien de centimètres Pierre dépasse-t-il Paul?

6) <u>caractéristiques de l'évolution des situations-problèmes présentées :</u>

Nous pourrions caractériser cette suite de problèmes de la manière suivante :

- de la constance : en effet, ces situations font toujours référence au même sens de la soustraction (trouver l'état final après une transformation négative d'un état initial) bien que le mot inducteur "reste" ne soit utilisé que dans deux situations sur quatre .
- de la progressivité dans les difficultés : les difficultés de calcul sont de plus en plus grandes et les textes de plus en plus compliqués :

  en 2 : les nombres sont légèrement supérieurs, l'énoncé reste proche de la situation de découverte.

  en 3 : l'élève doit prendre en compte le maître pour trouver le nombre à retrancher qui provoque un problème de retenue.

  en 4 : l'élève ne doit pas utiliser toutes les données numériques (le nombre trois écrit en lettres), il doit gérer un problème de retenue.

  en 5 : l'élève doit effectuer une opération intermédiaire pour calculer le nombre à retrancher (5×12) puis doit utiliser une donnée qui figure sur le dessin de la situation (les 175 litres de la cuve). Il n'est pas confronté au problème de la retenue.

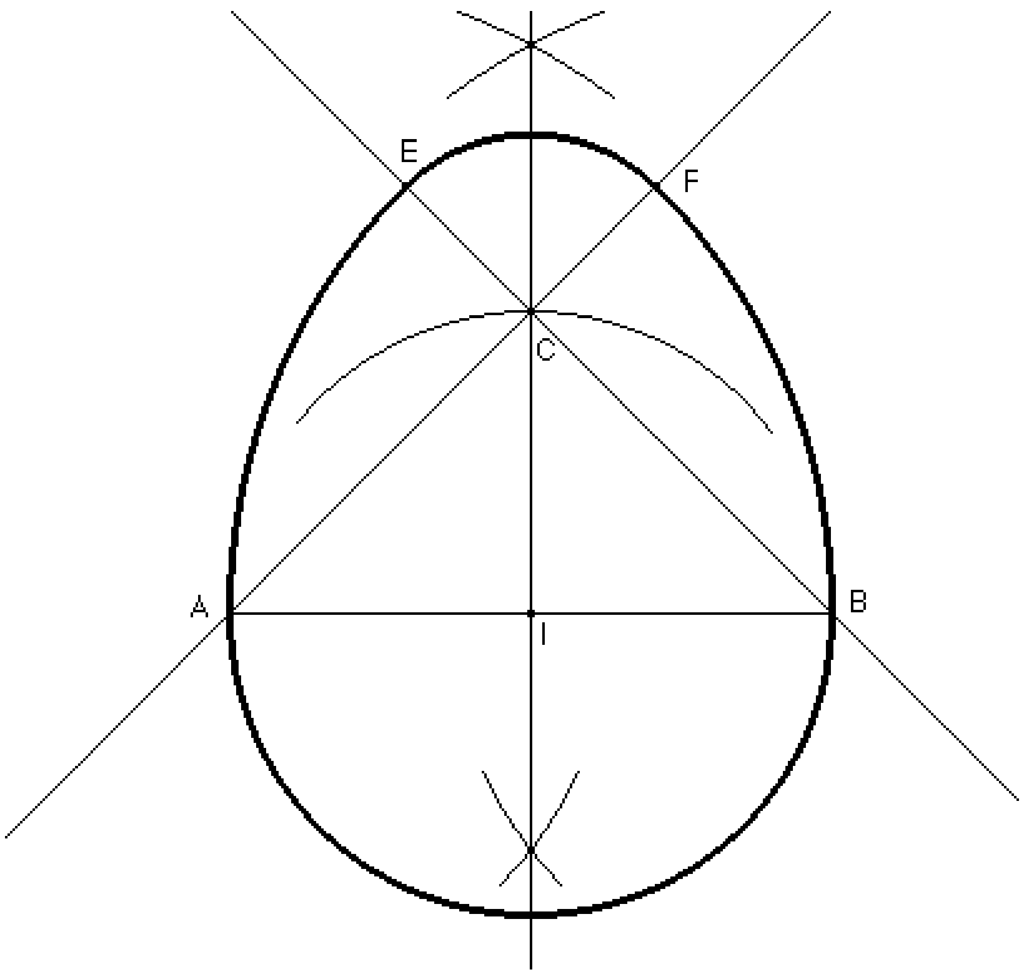
Remarque des auteurs : dans le sujet, les termes « situation », « séquence », « situation-problème » sont utilisés de façon floue.

ROUEN

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

1) Dessin de l'ove



2) ABC est un triangle isocèle et AC = BC car le point C est sur la médiatrice de [AB].

ABC est un triangle rectangle car il est inscrit dans le demi-cercle de centre I et de diamètre [AB] : en effet $IC = IA = IB = \frac{AB}{2}$.

Calculons AC.

<u>Première méthode :</u>

Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle isocèle ABC donne la mesure de AC (mesures en cm) :

$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2\,AC^2$ d'où $2\,AC^2 = 16$ d'où AC = $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

<u>Deuxième méthode :</u>

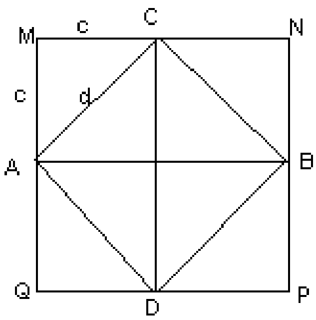
On peut appliquer de mémoire la relation entre la longueur du côté c d'un carré et celle de sa diagonale d : $d = c\sqrt{2}$ ou $c = (d\sqrt{2})/2$.

Donc AC = $(AB\sqrt{2})/2 = 2\sqrt{2}$

On peut d'ailleurs retrouver rapidement cette relation par les aires

aire MNPQ = $(2c)^2 = 4\,c^2$

aire ACBD = AC^2 = aire MNPQ /2 = $2c^2$



donc côté ACBD = AC = $c\sqrt{2}$

3) $F\hat{C}E$ est l'angle opposé à $A\hat{C}B$, il mesure donc 90°.

ABC est isocèle rectangle donc les angles $F\hat{A}B$ et $E\hat{B}A$ mesurent 45°.

4) AF = AB = 4 ; les points A, C et F sont alignés dans cet ordre, donc :

CF = AF – AC = $4 - 2\sqrt{2}$

5) Le périmètre de l'ove est constitué de 4 arcs de cercle EF, FB et AE, AB qui correspondent respectivement à $\frac{1}{4}$ de cercle de rayon CF, deux fois $\frac{45}{360}$ soit $\frac{1}{8}$ de cercle de rayon AF et un demi-cercle de rayon IB.

Ce qui donne pour le périmètre de l'ove :

$\frac{1}{4} \times 2\pi\ (4 - 2\sqrt{2}) + 2 \times \frac{1}{8} \times 2\pi \times 4 + \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = (2 - \sqrt{2} + 2 + 2)\pi = (6 - \sqrt{2})\pi$

Le périmètre de l'ove a une mesure de $(6 - \sqrt{2})\pi$, l'unité de mesure étant le cm.

6) $\alpha = 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \frac{2}{5}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{12}{5}} = 1 + \dfrac{5}{12} = \dfrac{17}{12}$

7) Une valeur approchée du périmètre de l'ove est :

$(6 - \frac{17}{12}) \times \frac{22}{7} = (\frac{72}{12} - \frac{17}{12}) \times \frac{22}{7} = \frac{55}{12} \times \frac{22}{7} = \frac{55 \times 11}{6 \times 7}$

ce qui donne à 10^{-2} près : 14,40 cm.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Les questions 1) 2) et 3) sont traitées simultanément.

Élève A
Il passe dans un registre arithmétique et recense les multiples de 3, pairs, entre 15 et 20. Sa procédure permet d'aboutir. Il ne commet pas d'erreur.

Elève B
Il est dans un registre schématique et représente 20 marches qu'il regroupe par deux et par trois. Sa procédure pourrait aboutir mais :
- il ne sait pas interpréter ce qu'il obtient : les regroupements communs de marches pour 6, 12 et 18 ;
- il interprète mal l'information « escalier entre 15 et 20 marches » : il ne la prend pas en compte au début (son schéma montre 20 « marches »), mais la récupère à la fin : il donne une réponse erronée, 16 entre 15 et 20, mais qui correspond à la somme des quotients entiers de 20 par 2 et 3 (quotients qu'il fait apparaître sur son schéma : 10 paquets de 2 marches, 6 paquets de 3 marches).

Elève C
Il écrit la table de 2, puis la table de 3 et entoure les multiples entre 15 (inclus) et 20. Puis il repère le multiple commun 18. Sa procédure est correcte.

Elève D
En l'absence d'explication, sa procédure semble hasardeuse.
Pour être correcte, il lui manque les remarques :
- 20 est un multiple de 2, donc 20 – 2 =18 aussi
- 15 est un multiple de 3 donc 15+3 =18 aussi
18 convient car c'est un multiple de 2 et de 3 entre 15 et 20.

Elève E
Il se projette dans l'action en numérotant les marches, ce qui l'amène à réciter la liste des multiples de 2, puis de 3. Il trouve donc naturellement 18.
Il traduit cette recherche par deux additions réitérées.
Sa procédure est correcte, sans erreur.

4) La notion essentielle visée est celle de multiples.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Première partie

1) Les polygones sont les figures A, B, E, F, G, H, J, K, M, N, O, P, Q, R et T, c'est-à-dire toutes sauf C, D, I, L et S.
Les quadrilatères sont les figures A, B, E, J, K, P et T.
Les parallélogrammes sont les figures B, J, K et P.
Les losanges sont K et P, les rectangles B et P, le carré P.

Rappelons en effet que :
- tout carré est un losange et un rectangle ;
- tout losange ou rectangle est un parallélogramme ;
- toute figure polygone à 4 côtés est un quadrilatère…

2) Les élèves doivent prélever des indices à l'œil ou avec un instrument (lignes courbes ou droites, nombre de côtés, angles droits, côtés parallèles, côtés de même longueur) qu'ils doivent mettre en relation avec des connaissances relatives au vocabulaire lié aux polygones et sur des propriétés de quadrilatères (ils doivent savoir ce que sont un polygone, un quadrilatère, un parallélogramme, un rectangle, un losange et un carré).

3) Donner le nombre de figure de chaque catégorie permet un contrôle partiel sur les réponses ; en particulier il incite à classer des figures dans plusieurs catégories.
Plus généralement, ce contrôle va **peut-être** inciter les élèves à classer les quadrilatères, non sur le modèle de la partition des ensembles (dire que les carrés ne sont ni rectangles ni losanges, les rectangles ne sont pas des parallélogrammes, les losanges non plus), mais sur un modèle d'inclusion (partielle ou totale) en classant un même quadrilatère dans plusieurs catégories.
Certains obstacles expliquent la difficulté des élèves sur ce point : dans la pratique courante on classe les objets dans des ensembles disjoints : on les met dans des boîtes et un même objet ne peut pas aller dans deux boîtes à la fois. D'autre part dans la communication ordinaire , le principe du maximum d'informations est suivi implicitement. Pour un carreleur, un carreau carré ne sera jamais qualifié de rectangulaire quand il en parlera car il n'y a aucune utilité à décrire la forme de façon incomplète, au contraire. La classification scientifique a besoin en revanche pour être fonctionnelle de procéder par inclusions.

4) Cette activité peut se situer en cycle 3, mais pas en CE2. Il est nécessaire qu'une étude de quadrilatères ait précédé ce travail : plutôt en CM1 en fin de progression ou en CM2 pour faire un point en cours de progression.
Le mot parallélogramme a disparu des programmes actuels de l'école élémentaire. Il est cependant commode et non interdit de le donner aux élèves, justement pour faire le point à un moment sur les quadrilatères.

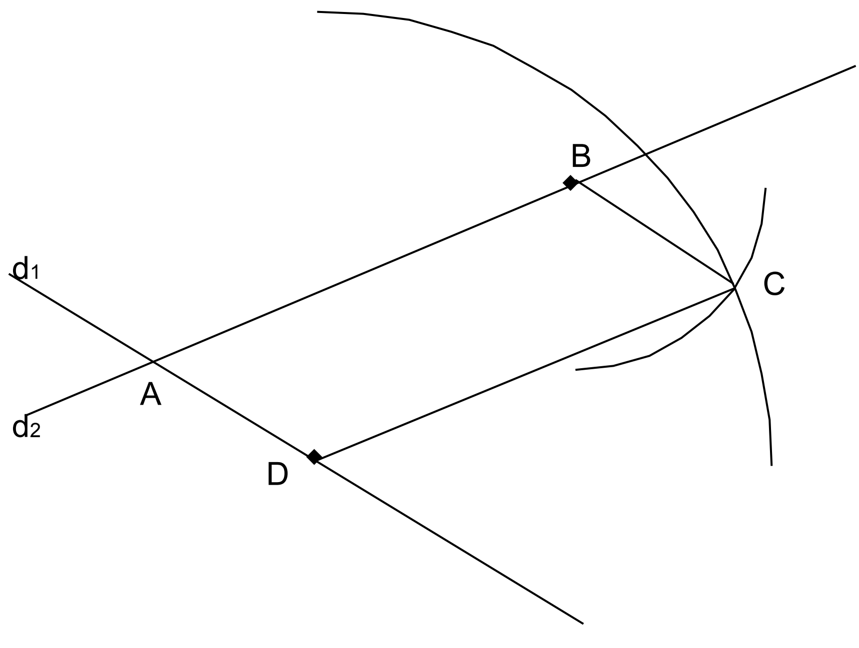
Deuxième partie

1a) La partie 1 du mémo correspond, dans les activités proposées aux élèves, à la phase 1 de construction de deux droites parallèles. Par contre, aucune activité n'a appris à vérifier le parallélisme de deux droites.
La partie 2 du mémo correspond à la phase 3 des activités : comment obtenir un parallélogramme.

1b) Pour affirmer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, il suffit de contrôler :
- 1ère possibilité : que ses diagonales se coupent en leur milieu,
- 2ème possibilité : qu'il est convexe et que deux de ses côtés opposés sont parallèles et ont même longueur,
- 3ème possibilité : que ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

1c) Pour vérifier que RSTU est un parallélogramme, les élèves vont vérifier le parallélisme des côtés, par exemple en utilisant un gabarit d'angle ou une équerre qu'ils font glisser le long d'une règle.

1d)



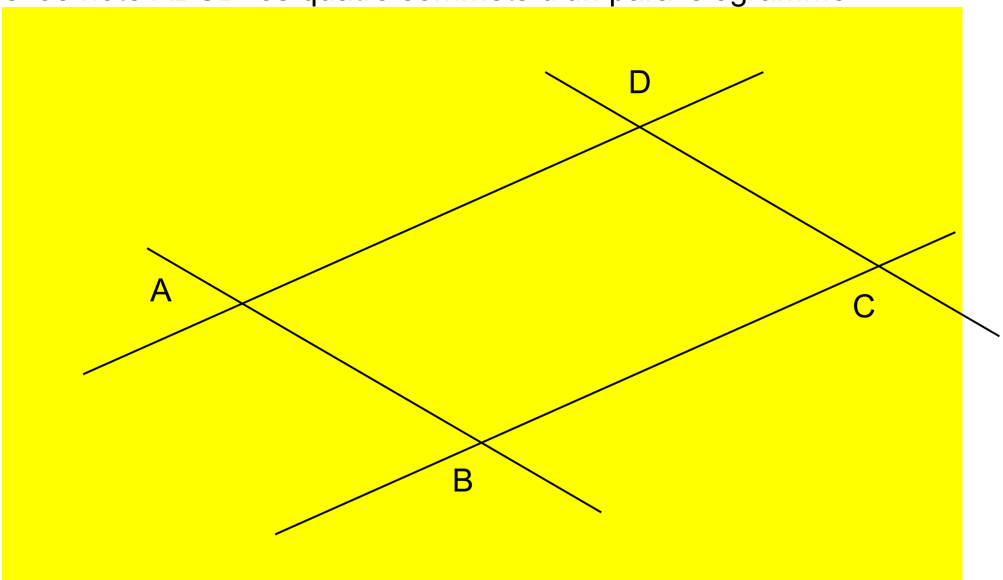
L'ambiguïté de l'étape 5 vient du fait que les cercles entiers se coupent en deux points C et C' symétriques par rapport à la droite des centres (BD) et un seul de ces points convient.
Le texte demande aux élèves de tracer des arcs et non des cercles entiers, ce qui ne résout pas la question, parce qu'il faut choisir le bon demi-plan de frontière (BD) pour les deux arcs. Ils peuvent ne pas se couper si l'un est dans un des demi-plans et l'autre dans l'autre demi-plan.

2) Les principales étapes des apprentissages visés dans les annexes 4 et 5 sont les suivantes :

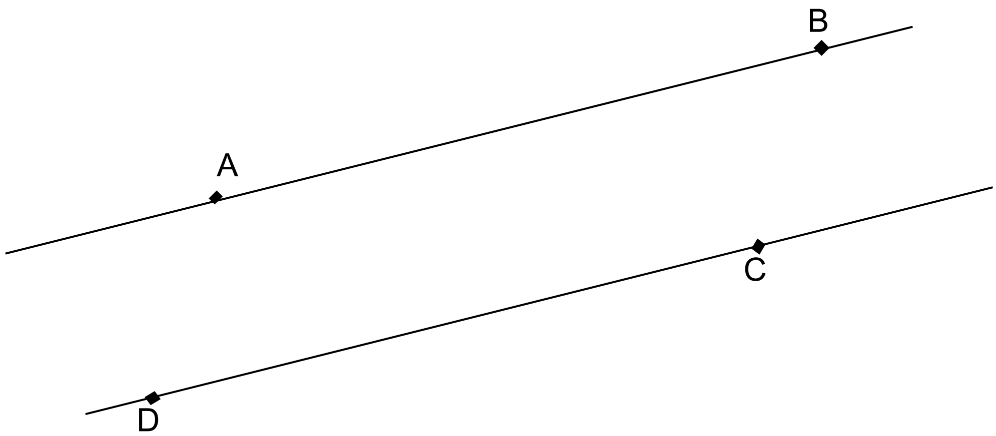
- Annexe 4 :
  - construire des parallèles avec un gabarit d'angle ;
  - construire un parallélogramme ;
  - définir et reconnaître un parallélogramme (par le parallélisme de ses côtés opposés).
- Annexe 5 :
  - constater une autre propriété du parallélogramme (côtés opposés de même longueur),
  - construire un parallélogramme à la règle et au compas.

3) Par exemple :
Pour construire un parallélogramme, il existe plusieurs méthodes :

<u>1ère méthode :</u>
Je trace deux droites parallèles, puis deux autres droites parallèles qui coupent les premières. Je note ABCD les quatre sommets d'un parallélogramme.

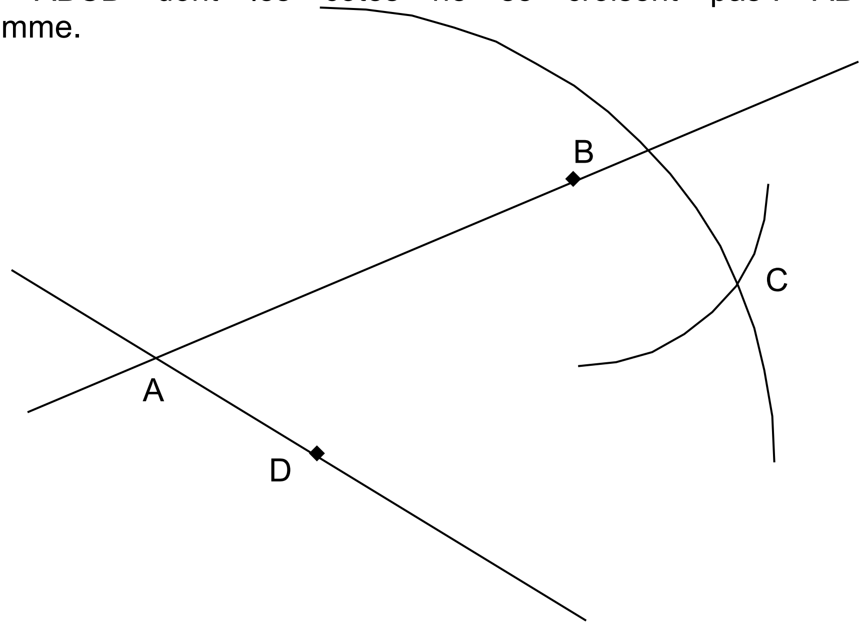


<u>2ème méthode :</u>
Je trace deux droites parallèles. Sur une droite je marque deux points A et B.
Je reporte la longueur AB sur l'autre droite : j'obtiens deux nouveaux points.
Je repère les quatre sommets ABCD d'un parallélogramme.



3ème méthode :

Je trace deux droites qui se coupent en un point A.
Je place un point B sur la première droite et un point D sur la deuxième.
Je trace le cercle de centre B et de rayon AB, et le cercle de centre D et de rayon AD.
J'appelle C le point d'intersection des deux cercles qui permet de tracer un quadrilatère ABCD dont les côtés ne se croisent pas : ABCD est un parallélogramme.

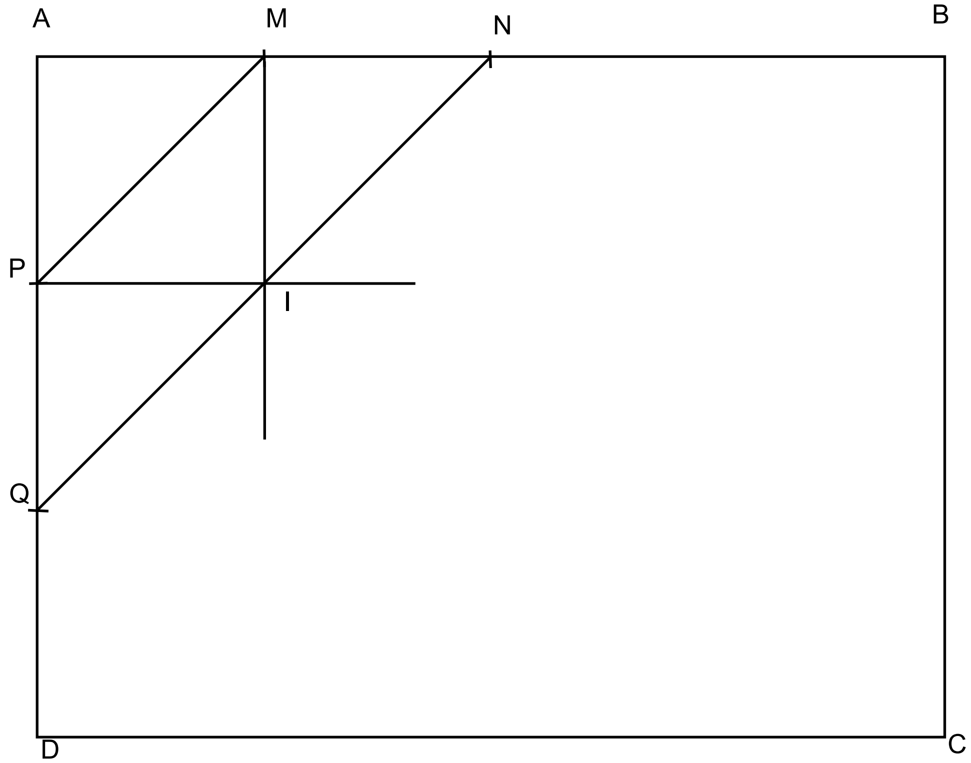


TOULOUSE.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 : nature de MNPQ



Les points AMN sont alignés dans cet ordre, les points APQ aussi, et $\frac{MA}{MN} = 1 = \frac{AP}{PQ}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que (PM) // (QN).
Donc MNPQ est un trapèze ; de plus, MN = PQ = 3 cm.
Conclusion : MNPQ est un trapèze isocèle.

2°) par hypothèses : (AM) // (PI) , (AP) // (MI) et $\widehat{PAB}$ est droit : le quadrilatère AMIP est donc un rectangle.
Comme AM = AP = 3 cm, AMIP est un carré (comme rectangle ayant deux côtés consécutifs isométriques) et ainsi PI = 3 cm
Soit J l'intersection de (PI) avec (QN)
D'après Thalès,(dans le triangle (QAN) avec (PJ) // (AN)) alors :
$\frac{PJ}{AN} = \frac{QP}{QA} = \frac{1}{2}$ (car QP = 3 cm et AQ = 6 cm)

ainsi PJ = 3 cm (car AN = 6 cm)
Or, PI = 3 cm et les points P,I et J sont alignés sur la parallèle à (AB) passant par P donc I = J
Q,J, et N sont alignés (définition de J), donc Q, I et N le sont.

Autre méthode : Le triangle PQI est rectangle ~~et~~ isocèle, donc l'angle $\widehat{PIQ}$ mesure 45° ; $\widehat{PIM}$ = 90° ; MNI rectangle et isocèle donc MIN = 45° donc $\widehat{QIN}$ = 180°.

EXERCICE 2:

1°) <u>Aménagement du pourtour</u>

a)
$\overline{aaa} = a + 10\,a + 100\,a = 111 \times a$
or $111 = 3 \times 37$ donc $\overline{aaa} = 3 \times 37 \times a = (3 \times a) \times 37$ qui **est divisible par 37**.
$444 = 3 \times 4 \times 37 = 12 \times 37$
Le quotient de la division de 444 par 37 est donc 12.
$333 = 3 \times 3 \times 37 = 9 \times 37$
Le quotient de la division de 333 par 37 est donc 9.

b)
La distance recherchée est un diviseur commun à 333 et 444. C'est donc un diviseur de leur PGCD. Le PGCD de 333 et 444 est égal à 3×37, c'est-à-dire 111.
D'où les diviseurs communs possibles : **1 ; 3 ; 37 ; 111**. Ce sont là toutes les possibilités cherchées.

c)

Distance entre 2 arbustes	1 mètre	3 mètres	37 mètres	111 mètres
Nombre d'arbustes plantés	445[8] × 2 + 332[9] × 2 = **1554**	149 × 2 + 110 × 2 = **518**	13 × 2 + 8 × 2 = **42**	5 × 2 + 2 × 2 = **14**

d) L'aménagement qui nécessite le moins d'arbustes (14) est réalisé avec une distance de 111m entre les arbustes

[8] le nombres d'arbustes sur l'une des longueurs est le nombre d'intervalles plus un.
[9] le nombres d'arbustes sur l'une des largeurs est égal au nombre d'intervalles moins un (arbustes de coin déjà comptabilisés sur les longueurs)

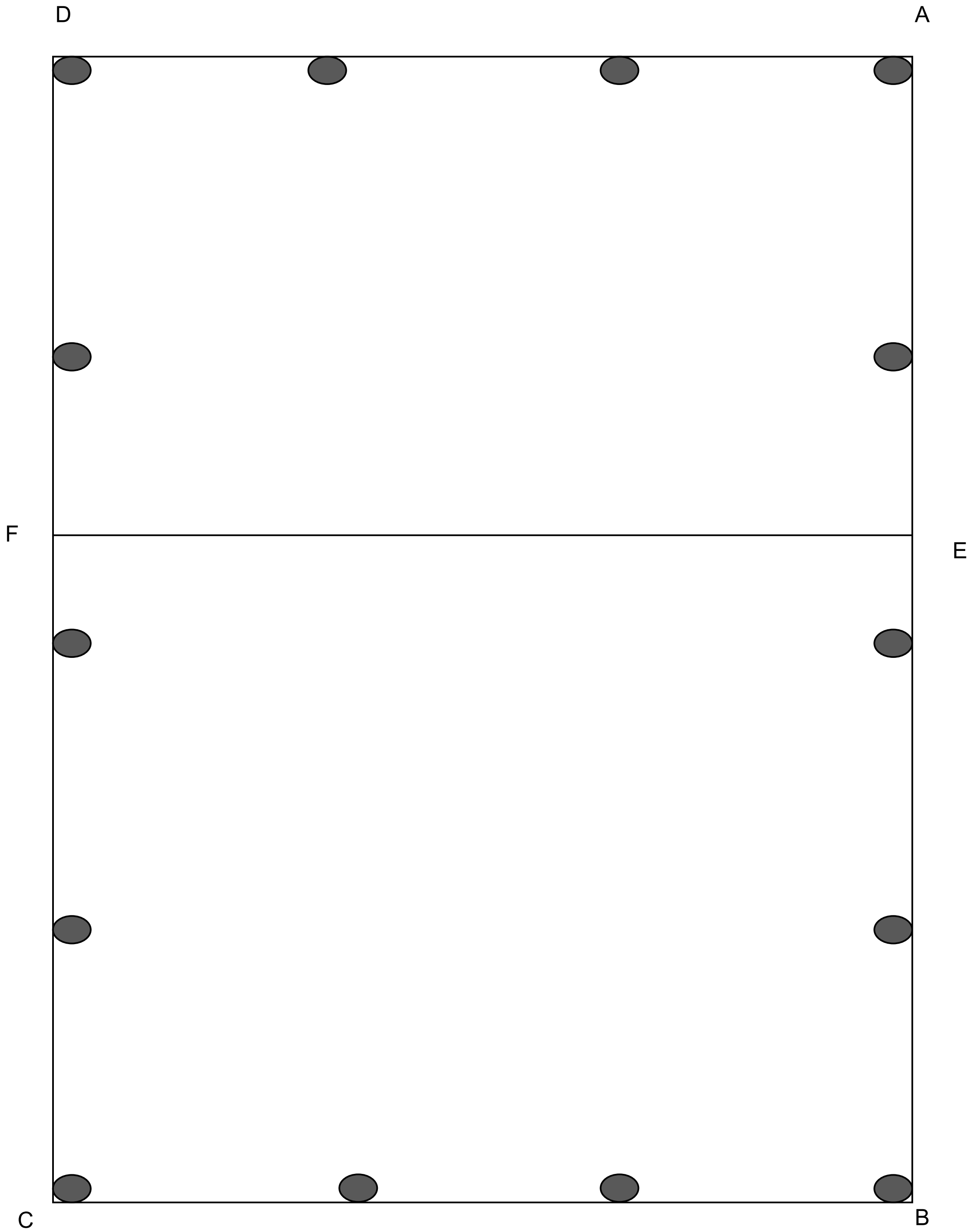


Schéma demandé correspondant aux questions 1d) et 2a)

2°) **Implantation d'une roseraie**

a) voir schéma ci-dessus pour le placement de E et F.

b) $EB = (1 - \frac{5}{12}) \times AB = \frac{7}{12} \times AB = \frac{7}{12} \times 444 = 259$ m

AB = DC donc FC = EB donc FC = 259 m.
Sur une rangée (parallèlement à (AB) donc à (EB)), le nombre de rosiers est égal au nombre d'intervalles moins 1, soit 258 rosiers.
Le nombre de rangées est égal au nombre d'intervalles moins 1, soit 332 rangées.

Le nombre total de rosiers est: 332 x 258 = 85656.

3) Sectorisation de la parcelle AEFD:

a) Le long de [AD], on a n secteurs de longueur k et n+1 intervalles de 1 mètre. D'où AD = $k \times n + (n + 1) \times 1$. De plus, AD = 333 m. On en déduit :
333 = (k x n) + n+ 1.

De même, le long de [AE], on a m secteurs de côté k et m + 1 intervalles de 1 m. D'où AE = $k \times m + (m + 1) \times 1$.

De plus, AE= $\frac{5}{12} \times$ AB= 185 m.

On en déduit: **185 = (k × m) + m + 1.**

b)
Si 333 = $(k \times n)$+ n+ 1, alors 332 = $(k \times n)$+ n= $n \times (k + 1)$.
Et pour 185 : si 185 = $(k \times m)$ + m + 1, alors 184 = $(k \times m)$ + m = $m \times (k + 1)$.
m et n étant entiers, k + 1 est donc diviseur commun de 332 et 184.

Or, k devant être maximal, k + 1 est le P.G.C.D de 332 et de 184 et les nombres m et n sont donc premiers entre eux.
Calcul de k :
$332 = 2^2 \times 83$ et $184 = 2^3 \times 23$: leur PGCD est 4
P.G.C.D (332 ; 184) = 4 donc : k + 1 = 4, donc **k = 3.**

Calcul du nombre de massifs:
D'après b), on a alors :

$n = \frac{332}{k+1} = \frac{332}{4} = 83$ et m = 46

le nombre de massifs carrés est donc de $83 \times 46 = 3818$

4) Financement du projet :

a) les nombres positifs m_1 et m_2 cherchés doivent vérifier le système:

$$\left|\begin{array}{l} m_1 + m_2 = 72000 \\ 0{,}04\, m_1 = 0{,}05\, m_2 + 900 \end{array}\right.$$

On trouve m_1 = 50000 F et m_2 = 22000 F.

b) Le nouveau capital dont il dispose est : $50000 \times 1,04 + 22000 \times 1,05 = 75100$ F.

c) La valeur arrondie à un euro près est 11449 euros.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1) Solution :
Dire que E est un point du cercle de centre A et de rayon 4 cm signifie que AE = 4 cm.
CD = 7 cm; [AB] et [CD] sont côtés opposés d'un rectangle ; on en déduit que AB = 7 cm.
A, E, B alignés dans cet ordre donc EB = AB - AE d'où **EB = 3 cm**.

2) L'activité de l'élève

L'activité de l'élève consiste à lire un document écrit comportant :
- du texte général avec quelques termes assez peu courants (ex : main levée),
- un système de codes, (lettres désignant des points qui sont des sommets , un centre, un point d'intersection ; codage d'un angle droit),
- des informations numériques,
- et une figure (dessin à main levée). Cette figure « objet » doit être alors interprétée comme l'énoncé d'une figure « désignée » à concevoir (dont une désignation serait le croquis coté, à l'échelle 1).
- de ces lectures, l'élève doit, en utilisant deux savoirs mathématiques (cercle et rectangle, voir ci-après), les organiser pour produire un résultat qu'il doit expliquer.

Les compétences sont donc :
- lire deux consignes.
- savoir ce que signifie une figure « à main levée ».
- lire une figure « objet » (voir ci-dessus) munie de codages institués,
- organiser des liens entre ces lectures et la figure « conçue »,
- organiser et expliciter une démarche.

Cela suppose :
- identifier cercle et rectangle,
- connaître certaines de leurs propriétés et les utiliser :
    - ♦ propriété concernant le cercle: la distance du centre à n'importe quel point est égale au rayon (AD = AE = 4 cm).
    - ♦ propriété concernant le rectangle : les côtés opposés ont même longueur
- faire fonctionner l'additivité de la mesure.
- savoir utiliser le vocabulaire associé.
- l'explication nécessite la mise en oeuvre implicite d'un raisonnement déductif :

(D $\in$ cercle et E $\in$ cercle) donc AE = AD = 4 cm
ABCD est un rectangle donc AB = DC = 7 cm
E est entre A et B donc EB = AB - AE = 3 cm

***Remarque** : on voit bien ici que les compétences dites générales sont étroitement imbriquées aux compétences demandées dans la tâche effective -donc aux compétences disciplinaires-. Un travail didactique plus approfondi consiste à effectuer une **analyse a priori de la tâche** et à confronter cette analyse à la contingence, c'est à dire à des travaux d'élèves.*

3) Adrien : a compris que cette figure « objet » n'était pas celle sur laquelle il avait à travailler : il suggère une rotation de AD vers AE (« quand D coupe sa fait E ») qui est, en acte, l'émergence de la propriété concernant le cercle *(remarque : on perçoit une conception cinématique du cercle*), mais il ne peut aller plus loin dans l'analyse de cette figure conçue et revient à la figure « objet » sur laquelle il mesure effectivement (et exactement) 1,8 cm.
Sa réponse est fausse.

Gaëlle : sa réponse : « 4 cm » montre clairement qu'elle ne travaille pas seulement sur la figure « objet ». Elle remarque que [EB] semble avoir la même longueur que [BC] ou [AD] ; or BC = 4 cm donc la réponse est 4cm. Elle ne se sert pas de l'information « 7 cm », donc peut-être pas du rectangle. Elle travaille un peu plus sur la figure conçue qu'Adrien puisqu'elle se dégage de la mesure effective.
Sa réponse est fausse.

Lise: a des difficultés de formulation, mais la démarche est correcte (utilisation du rayon du cercle et de l'égalité de longueur des côtés opposés du rectangle).
Sa réponse est exacte.

Victor : comme Gaëlle, Victor travaille sur la figure « objet » et en tire une égalité de segments : (E lui parait être le milieu du segment [AB]. Il sait que les côtés opposés d'un rectangle ont la même longueur), mais, comme Gaëlle, il va au-delà de cette figure « objet » puisqu'il conclut 3,5 cm, ce qui n'est bien sûr pas la mesure effective de [EB] sur le dessin.
Sa réponse est fausse.

Seule Lise a mené jusqu'au bout le travail d'organisation et d'argumentation par passage de la figure « objet » à la figure « conçue ».

Remarque : cet item fut très peu réussi à l'évaluation nationale. Le travail sur de telles figures nécessite un apprentissage spécifique.

SECOND VOLET (8 POINTS)

Question n° 1 :

a) Les relations qui définissent la division euclidienne entre deux entiers naturels a et b, tels que $a \geq b$ et $b \neq 0$, sont :
R1 : Dans N, il existe $r \in N$ et $q \in N$ uniques tels que $(a = (b \times q) + r)$ et $(r<b)$;

ou bien :
R2 : Dans N, Il existe q $\in$ N unique tel que $bq \leq a < b(q+1)$.
Avec le vocabulaire associé : a dividende, b diviseur, r reste et q quotient[10] euclidien.
Remarque : ces deux relations sont équivalentes en prenant $r = a - (b \times q)$

b) **examen des « je retiens bien »**

	analyse
Annexe 1	La double inégalité $6 \times 4 < 27 < 7 \times 4$ et le schéma renvoient à R2. L'égalité $27 = (6 \times 4) + 3$ renvoie à R1. Le reste est repéré sur le schéma par les sous-graduations allant de 24 à 27.
Annexe 2	Le schéma renvoie à R2. La conclusion renvoie à R1.
Annexe 3	La démarche de gauche renvoie à la constitution de parts égales (8 paquets de 4). La démarche de droite est une distribution. Ce sont deux démarches différentes. Elles sont rabattues à R1. Le cas particulier de r = 0 est évoqué.
Annexe 4	Un algorithme de la division est présenté : c'est la recherche du plus grand multiple du diviseur - ce qui renvoie à R2. A côté, l'égalité renvoie à R1. Le mot « quotient » est introduit.

Les divers résumés « je retiens bien » utilisent les deux relations R1 et R2.

Question 2 :
Pour conduire notre analyse, nous nous baserons sur la partie « activité », qui est le fil conducteur du manuel.

Annexe 1 :
Activité : Il s'agit dans le cadre de situations de distribution d'encadrer 82 entre deux multiples consécutifs d'un même nombre.
Les exercices qui suivent travaillent déjà sur les relations R1 ou R2.

Annexe 2 :
L'activité (page de gauche) vise un travail sur "le procédé par soustractions successives". Ce procédé est montré par un personnage de l'énoncé.
Les exercices qui suivent manient tantôt R1, tantôt R2. Le lien entre la procédure par soustractions successives et R1 ou R2 reste à la charge de l'élève (ou du professeur).

Dans le passage de l'annexe 1 à l'annexe 2, le manuel veut faire apprendre un premier procédé de calcul du nombre de parts.

Annexe 3 :
Cette fois, il s'agit d'optimiser le procédé vu en annexe 2.
Le personnage de Nicolas permet de montrer à l'élève que la soustraction de 10 fois 45 est plus efficace.
Les termes quotient et reste sont introduits.

Annexe 4 :

[10] par abus souvent appelé quotient .

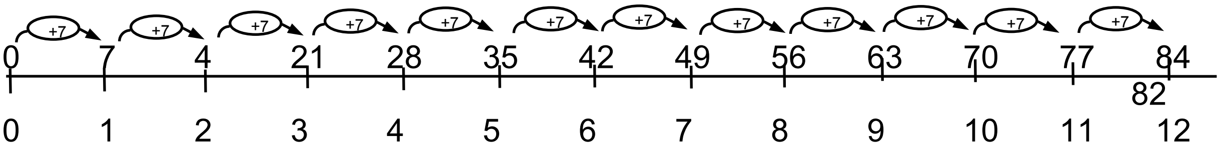
La fiche enseigne la création d'un répertoire des multiples de 7 et présente une forme assez aboutie d'un l'algorithme usuel de la division euclidienne :

Dans le passage de l'annexe 3 à l'annexe 4, le manuel veut faire apprendre aux élèves une organisation de la recherche du quotient qui optimise , par une disposition spatiale, qui a été entrevue en annexe 3 (l'utilisation de certains multiples du diviseur).

Question n° 3

Audrey veut distribuer un sachet de papillottes par invité. On ne sait pas quel est le nombre d'invités. Audrey commence un schéma « pour prévoir le nombre de sachets qu'elle pourra faire ».
On conclut : $6 \times 12 < 82 < 7 \times 12$.
Audrey « se rend compte qu'elle n'aura pas assez de papillottes pour en donner 12 à chacun ».C'est donc que son nombre d'invités est strictement supérieur à 6.
Elle recommence un partage et « peut donner un sachet à chaque invité si elle met seulement 7 papillottes par sachet ».
Combien a-t-elle d'invités ?
Soit n le nombre d'invités. $7 \times n$ est inférieur ou égal à 82. Donc n = 1, 2, 3, 4... ou 11. L'on sait d'après la première activité (1-1, 1-2 et 1-3) que $n \geq 7$
donc n = 7 ou 8 ou 9 ou 10 ou 11.
Mais ce n'est sans doute pas ce que l'auteur du manuel avait en tête...puisqu'il demande combien « reste-t-il de papillottes après le partage », ce qui laisse penser que le partage est optimisé (que le reste de papillottes est inférieur à 7). **Donc on retiendra n=11 avec un reste de 5.**

Son schéma serait alors :



La technique utilisée par Audrey est celle de l'énoncé de la suite des multiples de 12. Elle est assortie du schéma (*dont on peut penser qu'il n'est pas très spontané*).
Cette représentation a l'avantage de permettre à l'élève **de s'entraîner à la construction de la suite des multiples d'un nombre sous la forme d'une bande numérique** et ainsi de montrer l'encadrement du nombre cible par les 2 multiples consécutifs.

Question n°4

Remarque : la phrase à compléter (en base de page) « chaque enfant aura au maximum...glaces » est ambigue. Dans cette page, il s'agit de rechercher (si chacun des 6 enfants prend une glace à chaque goûter) : combien de jours cela pourra durer ?
La question aurait pu être posée moins évasivement que « si chacun en prend plusieurs par goûter, on n'en mangera pas longtemps ».
A supposer que la tâche soit éclaircie, répondons à la question :

Cette contrainte proposée dans le livre du maître va permettre d'éviter que l'élève soit simple spectateur du travail du « plus grand ». Elle va permettre aussi de s'assurer que les élèves ont compris la situation-problème et de se mettre d'accord sur ce qu'il convient de partager.
- Va-t-on partager séparément les glaces par boîte, par catégorie ?
- Va-t-on partager en globalisant comme cela est suggéré ensuite ?

Le professeur devra trancher pour ne pas que les élèves aillent dans des directions trop éloignées les unes des autres. Ce faisant, pourront apparaître diverses procédures utilisées par les élèves et non une seule.
Si le professeur retient l'idée de globaliser, comme le fait l'élève du manuel, deux autres procédures possibles sont :

Utiliser une procédure de type additif : 6 pour un jour, 6 autres pour le deuxième jour, etc. jusqu'à atteindre 88.

Utiliser des procédures multiplicatives. Encadrement par les multiples. Rechercher le nombre par lequel il faut multiplier 6 pour obtenir ou s'approcher le plus possible de 88.
Ou toute variante de ces deux procédures de base.

Question n° 5 :

Remarque : Les procédures des trois élèves semblent réelles mais elles ne le sont pas. On ne trouvera pas en classe (sauf exception) un Nicolas présentant, à ce stade de l'apprentissage, sa procédure sous cette forme aussi aboutie, comme on ne trouvera pas une Anna concluant par une double inégalité. Quant à Ronald, souhaitons n'avoir que ces élèves, l'enseignement des mathématiques en sera grandement facilité...

Nicolas procède par soustractions réitérées et tient la comptabilité (le nombre de colliers).La procédure est correcte mais longue.
Anna commence en effectuant $\times 4$ puis $\times 8$. On ne peut pas savoir si 360 est obtenu par le produit de 45×8 ou par 180 + 180. Elle passe ensuite à $\times$ 10, puis ajuste au coup par coup. Ensuite elle encadre 562 par 2 multiples de 45. La procédure est efficace, mais n'est pas automatisable à terme.

Ronald met en œuvre une procédure soustractive d'un paquet de 10 fois 45. Il combine une bonne utilisation de la numération (multiple de 10) et une procédure soustractive. La procédure est correcte et efficace et est automatisable à terme.

Question 6 :

Le manuel, vu dans la partie « activités », propose une progression qui va de l'encadrement entre deux multiples consécutifs du diviseur, en passant par l'écriture de la forme $a = (b \times q) + r$ pour, ensuite faire apparaître des techniques de recherche du quotient euclidien et en privilégier une : celle des soustractions successives, en la faisant évoluer. Il n'est pas en contradiction avec l'annexe 6. Mais les exercices qui sont associés à chacune de ces activités ne sont pas aussi progressifs. Ex : la disposition de type R1 apparaît dès l'exercice 1 de l'annexe 1 alors que l'activité porte sur R2.

Globalement, dans les 4 annexes, le savoir est montré (en ostension) ou bien cotoyé (ostension déguisée) à l'aide de prestations d'élèves fictifs. En se contentant, à terme, d'un tel rapport au savoir, le professeur engage les élèves dans une pratique, par procuration, des mathématiques.

En complément d'information : l'annexe 6 est un extrait de texte qui, bien que paru au B.O., n'a jamais été en vigueur..

Index de mots clés :