Corrigés

AIX-MARSEILLE, CORSE, MONTPELLIER, NICE, La Martinique

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 (1,5 POINTS)

a) Pour déterminer si un prix P est une réponse possible au problème posé, on calcule 100 – 8.P et on compare avec P.
Si $0 \leq 100 - 8.P < P$, alors la réponse P est possible ; c'est le cas pour les réponses : 11,50F ; 12F et 12,50F ; en effet :
$100 = 8 \times 12{,}50$
$100 - 8 \times 11{,}50 = 8$
$100 - 8 \times 12 = 4$
Si $100 - 8.P \geq P$,
alors P n'est pas une solution du problème, car il est possible d'acheter un neuvième cahier ; c'est le cas pour P= 11F, car $100 - 8 \times 11 = 12$.
Si $100 - 8.P < 0$,
alors P n'est pas une solution du problème, car la somme de 100F est insuffisante pour l'achat de 8 cahiers ; c'est le cas pour P = 13F, car $8 \times 13 = 104$
En résumé, trois réponses possibles : 11,50F ; 12F et 12,50F et deux réponses impossibles : 11F et 13F.

Remarque : il aurait été possible de résoudre le système d'inéquations :
$8.P \leq 100 < 9.P$
et de retenir les valeurs ad hoc parmi 11,50F ; 12F, 12,50F, 11F et 13F.

b) Soit P le prix d'un cahier, on doit avoir :

$$100 = 8.P + r \text{ avec } 0 \leq r < P$$

d'où $8.P \leq 100 < 9.P$

soit $\frac{100}{9} < P \leq 12{,}5$

Donc les prix P possibles pour un cahier (si on considère que la précision d'un prix se limite à 2 chiffres après la virgule) sont de la forme :

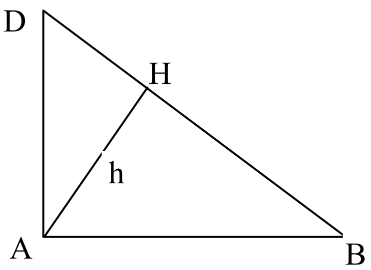
$$\frac{N}{100} \text{ avec N entier vérifiant } 1112 \leq N \leq 1250$$

Autres formulations possibles pour la réponse :
Les prix P possibles sont 11,15F ; 11,20F ; 11,25F ; … ; 12,45F ; 12,50F (si on considère qu'actuellement tous les prix sont arrondis à 5 centimes près)
Les prix P possibles sont les décimaux P tels que :

$\frac{100}{9} < P \leq 12{,}5$ et 100.P entier

EXERCICE 2 (4,5 POINTS)

1°)
On peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle ABD¨rectangle en A,
d'où : $AB^2 + AD^2 = BD^2$ soit $BD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
d'où : $BD = 5$ cm



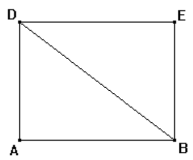
On peut alors exprimer l'aire du triangle ABD de deux façons :

Aire (ABD) = $\frac{AB \times AD}{2}$ = 6 cm²

Aire (ABD) = $\frac{h \times BD}{2} = \frac{5h}{2}$ cm²

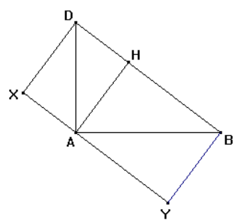
avec h longueur de la hauteur relative à l'hypoténuse BD
d'où : h = 2,4 cm

Remarque : On peut retrouver les formules de la manière suivante :



L'aire de ABD est la moitié de celle du rectangle ABED, donc :

Aire (ABD) = $\frac{AB \times AD}{2}$



L'aire de ABD est la moitié de celle du rectangle DBYX, donc :

Aire (ABD) = $\frac{AH \times BD}{2}$

2°)a)
a) BDIJ est un trapèze
En effet, dans le plan (ABCD), la droite (IJ) passe par les milieux I et J des côtés [AD] et [AB] du triangle ABD ; on a donc, en utilisant le théorème de la droite des milieux :
(IJ) // (BD)
et $IJ = \frac{BD}{2}$. On a calculé la longueur BD au 1°), d'où :
(Le triangle ABD est rectangle en A car ABCD qui est une face du parallélépipède rectangle est un rectangle.)

BD = 5 cm   IJ = 2,5 cm

De plus :   ID = $\dfrac{AD}{2}$ = 1,5 cm   JB = $\dfrac{AB}{2}$ = 2 cm

<u>DBB'D' est un rectangle</u>

En effet : la droite (BB') (arête du parallélépipède rectangle) est perpendiculaire au plan (ABCD) (face du parallélépipède rectangle) ; elle est donc perpendiculaire à toutes les droites de ce plan qui passent par le point B ; en particulier, on a :

(BB') ⊥ (BD)

De la même manière on peut établir que :

(BB') ⊥ (B'D') ; (DD') ⊥ (BD) et (DD') ⊥ (B'D')

Les angles du quadrilatère DBB'D' étant droits, c'est donc un rectangle.

<u>Variante :</u> On peut montrer que DBB'D' est un parallélogramme ayant un angle droit ; pour cela, on peut s'appuyer sur le fait que dans le parallélépipède rectangle ABCDD'C'B'A', les arêtes [BB'] et [DD'] sont parallèles et de même longueur.

Les dimensions de ce rectangle sont : BD =B'D' = 5 (calculé précédemment)

et   BB' = DD' =AA' = 6 par hypothèse.

b)

Sur la page suivante, on a représenté en vraie grandeur deux des patrons du compartiment qu'il est possible de construire. Nous n'avons pas tenu compte du fait que la boite est sans couvercle, car l'énoncé ne précise pas quelle face du parallélépipède rectangle fait fonction de couvercle

c)

On regarde le compartiment comme un prisme droit de base le trapèze BDIJ et de hauteur BB'.

Soit V le volume de ce compartiment :

V = Aire (BDJI) x BB'

<u>Calcul de l'aire du trapèze BDJI :</u>

On peut calculer cette aire par différence des aires des deux triangles rectangles ABD et AIJ ; le triangle AIJ étant une réduction à l'échelle 1/2 du triangle ABD, on a :

Aire(AIJ) = $\dfrac{\text{Aire}(ABD)}{4}$ soit   Aire(BDIJ) = $\dfrac{3}{4} \times \text{Aire}(ABD)$

On peut aussi utiliser la formule : $\dfrac{(IJ + BD) \times h}{2} = \dfrac{(2{,}5 + 5) \times 1{,}2}{2} = 4{,}5$

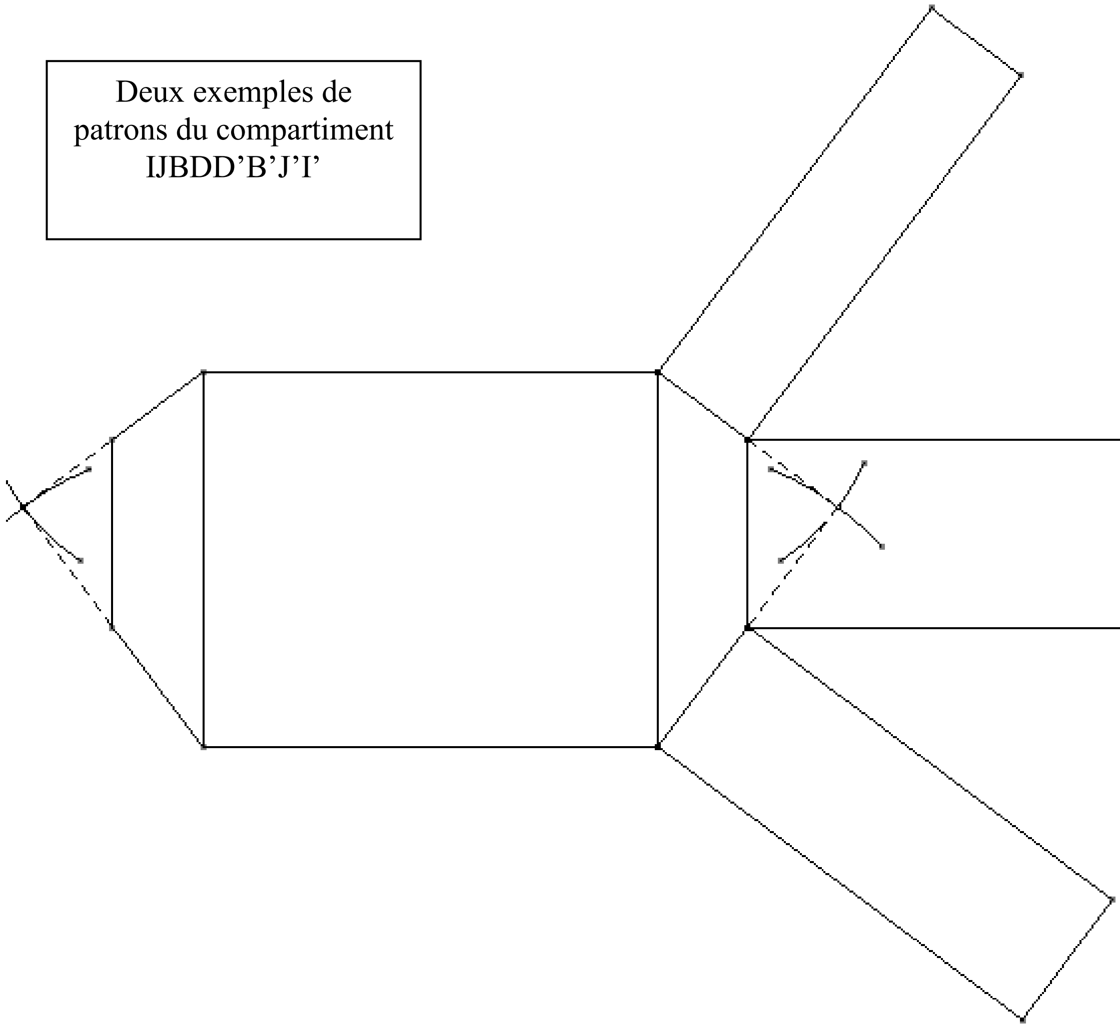
Avec h hauteur du trapèze BDIJ ; $h = \dfrac{2{,}4}{2}$ (la moitié de la hauteur relative à l'hypoténuse BD dans le triangle ABD, que l'on peut calculer à l'aide du théorème de Thalès).

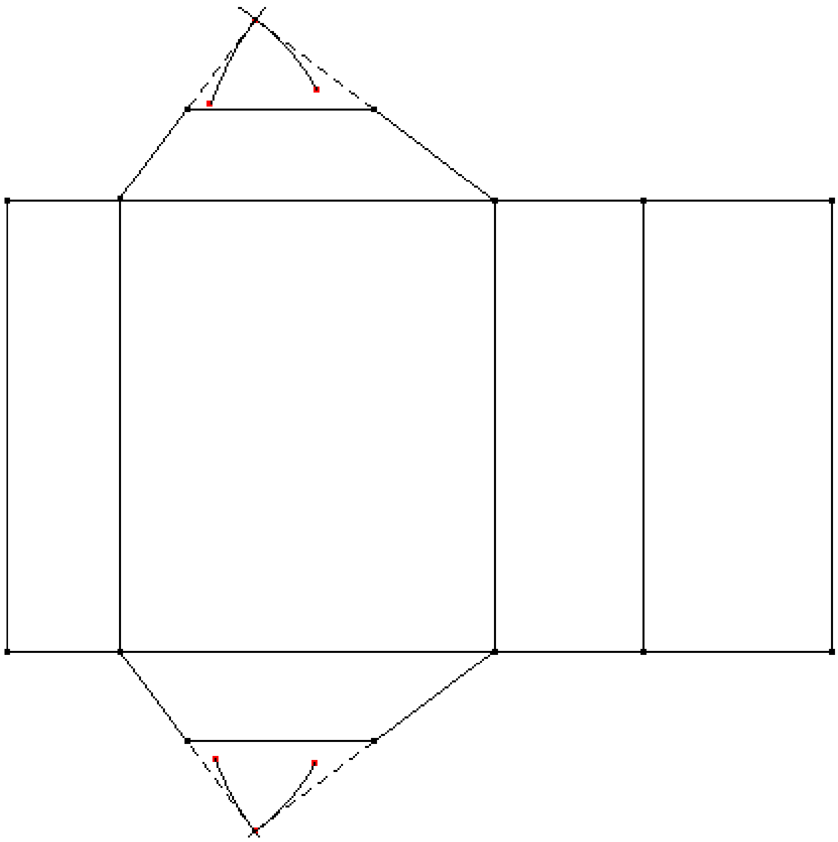
D'où : <u>V = 27 cm ^{3}</u>

<u>Autre méthode :</u>

Le volume du compartiment est la différence entre le volume du prisme droit de base le triangle ABD et de hauteur BB' et celui du prisme droit de base le triangle AIJ et de hauteur JJ'.

Deux exemples de patrons du compartiment IJBDD'B'J'I'





EXERCICE 3 (2 points)

1°)

PROPOSITION A

Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 2 alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 4. Cette proposition est **VRAIE** ; en effet :

SOLUTION 1

D'après l'algorithme classique de la multiplication, le chiffre des unités du produit est le chiffre des unités du produit des chiffres des unités de chaque facteur.

$$\begin{array}{lll} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2 & \\ \text{X} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2 & \\ \hline & (\ldots) & 4 \\ & (\ldots) & . \\ & (\ldots) & . \\ \hline & & 4 \end{array}$$

SOLUTION 2

Tout nombre entier dont l'écriture se termine par 2 est de la forme 10n + 2, avec n entier naturel ; d'où son carré :

$$(10n + 2)^2 = (10n)^2 + 2 \text{ x } 2 \text{ x } 10n + 4 = 100n^2 + 40n + 4 = 10 \text{ x } (10n^2 + 4n) + 4$$

On reconnaît l'écriture d'un nombre dont le chiffre des unités est 4.

PROPOSITION B

Si l'écriture d'un nombre entier se termine par 4 alors l'écriture du carré de ce nombre se termine par 16.

Cette proposition est **FAUSSE**. Un contre-exemple suffit pour le prouver :

L'écriture de $14^2 = 196$ ne se termine pas par 16.

2°)

SOLUTION 1

Le nombre n est strictement inférieur à 100 et la fonction carré est une fonction croissante sur l'intervalle [0 ; 100], donc : $n^2 < 10000$

En conséquence, son écriture a quatre chiffres au plus.

SOLUTION 2

$15 \leq a5 \leq 95$

Les carrés sont rangés dans le même ordre que les nombres de départ (croissance de la fonction carré sur l'intervalle [15 ; 95]),

Donc : $15^2 \leq (a5)^2 \leq 95^2$ soit : $225 \leq (a5)^2 \leq 9025$

L'écriture du carré de d'un nombre de deux chiffres se terminant par 5 comporte donc au plus 4 chiffres.

SOLUTION 3

On pourrait aussi calculer les 9 carrés : $15^2, 25^2, \ldots, 95^2$ et vérifier.

Généralisé, ce calcul fournit aussi la réponse à la question suivante.

On a : $n^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100(a^2 + a) + 25$

Donc : **l'écriture de n^2 se termine par 25**

et **le nombre de centaines de n^2 est** $a^2 + a$, c'est à dire **a(a+1)**

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1°)
La principale compétence mathématique évaluée dans cet exercice :
Savoir résoudre un problème de type soustractif.
Selon la typologie de G. Vergnaud, il s'agit d'un problème du champ additif :
- de type « transformation d'état », dans lequel l'état initial et l'état final sont connus ; on recherche la transformation,
- ou de type « partie-partie-tout » dans lequel le tout et une partie est connue ; on recherche le complément.

La seule technique opératoire exigible à la fin du cycle 2 est celle de l'addition ; on n'attend donc pas des élèves, lors de cette évaluation au début du CE2, qu'ils résolvent ce problème en utilisant la soustraction (procédure experte de résolution).
Cependant, pour les élèves qui auront utilisé la soustraction pour résoudre ce problème, on pourra aussi évaluer leur capacité à la calculer.

2°)
Le problème peut être mis en équation de plusieurs manières différentes :
Si x désigne le nombre de coureurs ayant abandonné, on peut écrire :
$108 - x = 85$
Le nombre coureurs au départ diminué des coureurs ayant abandonné est égal au nombre de coureurs à l'arrivée
$85 + x = 108$
Le nombre de coureurs à l'arrivée ajouté aux coureurs ayant abandonné est égal au nombre de coureurs coureurs au départ
$108 - 85 = x$
Le nombre de coureurs au départ diminué des coureurs à l'arrivée est égal aux coureurs ayant abandonné

Remarque : Si y désigne la transformation subie par le nombre des coureurs :

$$108 + y = 85$$

(dans ce cas, on recherche un nombre relatif).

3°)
Il ne faut pas perdre de vue qu'un enseignant ne classe pas des procédures pour le plaisir de classer mais pour réguler son travail dans la classe. Un trop grand nombre de classes ne peut être efficace.
On peut distinguer :
- Les procédures non apparentes de Melvin et de Nabila (le premier ne donne pas de réponse, la deuxième donne la réponse exacte) ;
- Les procédures traduisant une mauvaise compréhension de la situation : Camille qui fait une modélisation erronée de la situation.
- Les procédures (abouties ou non) qui traduisent une bonne compréhension de la situation.

Celles-ci se répartissent en :
- Mime de la situation avec recours à des représentations (Driss et Siham) ou avec utilisation des nombres (le décomptage d'Hildéa) : on peut remarquer le caractère plus élaboré de la représentation utilisée par Siham ; les coureurs sont représentés par paquets de dix ; c'est plus rapide et plus efficace pour dénombrer.

- Recherche de complément :
    - par sauts successifs pour Amandine, Gabrielle (Gabrielle fait une erreur de calcul en additionnant les valeurs des sauts et répond 24).
    - par une addition à trou pour Cédric qui fait une erreur de calcul et répond 13.
- Procédures soustractives : Houssan et Benyamine qui se trompent dans leur calcul. La conclusion de Houssan (5) est incompréhensible.

Le classement qui consiste à mettre d'un côté les procédures qui aboutissent à la réponse attendue, et de l'autre celles qui ont conduit à une réponse erronée ou à une absence de réponse n'a pas d'intérêt didactique.

<u>Erreur d'Houssan :</u>

On peut envisager trois hypothèses entre lesquelles il est impossible de trancher :

H1. Erreur dite « des écarts non orientés » : dans chaque colonne, il calcule l'écart entre le plus grand et le plus petit chiffre

8 – 5 = 3 8 – 0 = 8 1 – 0 = 1

H2. Au lieu de soustraire, il additionne 108 et 85 et oublie la retenue.

H3. Il considère que le statut du « zéro » est le même dans une soustraction ou dans une addition : celui d'un élément neutre.

<u>Erreur de Benyamine :</u>

Pas de problème apparent pour les unités. Pour la suite du calcul, il est difficile de recréer la chronologie. Ne pouvant ôter 8 de 0, elle ôte 8 de 10 et place le 1 en bas (technique par compensation). Mais elle écrit 3, qui n'est sans doute pas une erreur simple de calcul. En effet la présence du 7 indique très vraisemblablement qu'elle a retranché 1 de 8 pour obtenir le 7. Mais ce 1 n'est pas le 1 entouré du bas, puisqu'elle trouve 33 et non 133. Il semble donc que le 1 ajouté en haut soit traité doublement : par compensation d'abord, mais aussi par retrait au terme du bas.

Rappel :

la technique par emprunt

$$\begin{array}{cccc} & 2 & \boxed{1} & \\ & \cancel{3} & 2 & 8 \\ - & 1 & 5 & 7 \\ \hline & 1 & 7 & 1 \end{array}$$

8 – 7 = 1
2 – 5 « on ne peut pas »
Je prends une des 3 centaines (3 barré et remplacé par 2) et je l'échange contre 10 dizaines :
10 + 2 = 12 12 – 5 = 7
2 – 1 = 1

et la technique par compensation

$$\begin{array}{cccc} & & \boxed{1} & \\ & 3 & 2 & 8 \\ - & \boxed{1}1 & 5 & 7 \\ \hline & 1 & 7 & 1 \end{array}$$

8 – 7 = 1
2 – 5 « on ne peut pas »
J'ajoute 10 dizaines aux 2 déjà présentes :
12 – 5 = 7
Je compense en enlevant 1 centaine de plus :
1 + 1 = 2
3 – 2 =1

4°)
On mettra le code 1 à Amandine, Siham et Nabila qui ont donné la réponse attendue : 23.

Cédric devrait recevoir le code 9 : autres résultats.
Si on considère que faire une addition à trou rentre dans la« mise en œuvre de l'addition », on pourra lui mettre le code 8.
Camille devrait recevoir le code 8 si on se réfère à la procédure utilisée, mais au regard de sa réponse (193 coureurs), on pourrait penser au code 9.
Remarque : ce n'est pas l'opération utilisée qui détermine la pertinence d'une procédure.
Les consignes de codage sont ambiguës :
Elles ne permettent pas de distinguer l'utilisation erronée de l'addition et l'utilisation pertinente de l'addition à trous.
Le codage proposé ne permet pas de distinguer les erreurs relatives à la procédure de résolution du problème de celles relatives à la procédure de calcul.

SECOND VOLET (8 POINTS)

1°)
Les écritures équivalentes des nombres décimaux utilisables par un élève :

- L'écriture à virgule : 4,35
- L'écriture fractionnaire (avec dénominateur puissance de 10) : $\frac{435}{100}$
- L'écriture littérale : quatre unités trois dixièmes cinq centièmes ou quatre unités trente cinq centièmes
- L'écriture « anglo-saxone » : $4+\frac{35}{100}$
- L'écriture correspondant à la décomposition canonique suivant les puissances de 10 :
$4+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}$

Au cours des années antérieures, en mathématiques, les activités de comparaison des nombres portaient sur les entiers.
Les premières activités de comparaison au cycle 1 concernent des quantités représentées par des collections effectives, puis dessinées. Puis il s'agit de comparer directement des nombres donnés par oral, ou écrits traditionnellement en chiffres, ou encore donnés sous des écritures arithmétiques (10+10+7 et 10+10+10+2).
Les activités portent sur des comparaisons de mesures de grandeurs : longueurs, masses, durées, prix, …

2°)

Nous supposerons pour répondre à cette question, qu'il s'agit de repérer la situation qui **n'utilise pas** directement les **écritures à virgule**.

- Toutes les situations proposées relèvent de l'ordre sur les nombres décimaux, mais dans la situation n°3, toutes les mesures ne sont pas données par leur écriture à virgule :
  - les grandeurs en présence sont mesurées soit à l'aide d'une unité, soit à l'aide de deux unités (« mesures complexes ») ;
  - les unités choisies dans l'exercice ne sont pas les mêmes pour toutes les données.
- L'avantage de cette démarche est de s'appuyer sur un domaine connu. De nombreuses activités de comparaison ont porté dans les classes antérieures sur des longueurs ou des masses mesurées avec une ou deux unités, les mesures étant des entiers.
- Mais cela présente l'énorme inconvénient de laisser croire aux élèves que les nombres décimaux se réduisent à un re-codage de mesures complexes. Cela occulte le fait que les nombres décimaux sont de nouveaux nombres permettant de résoudre des problèmes pour lesquels les entiers sont insuffisants. Cette démarche risque de renforcer une conception erronée usuelle des décimaux : le décimal vu comme deux entiers séparés par une virgule. On sait que cette conception se matérialise par de nombreuses erreurs, en particulier lors des comparaisons de décimaux, mais aussi pour la multiplication de deux décimaux.
- On peut ajouter que, même si elle introduit directement les écritures à virgule, la situation 1 porte sur des nombres qui peuvent renvoyer à un re-codage de mesures complexes : 185,10F pour 185F et 10 centimes.
- La situation 4 se distingue des autres situations non par une introduction différée des écritures à virgule mais par une utilisation des décimaux dans le cadre d'un problème de partage où les entiers sont insuffisants : les décimaux qui interviennent ici sont des approximations décimales du rationnel non décimal $\frac{1}{7}$.

3°)

a)

Les situations qui conduisent à ranger des données sont la situation 1, les questions 1 et 3 de la situation 2 et la situation 4.

b)

Les situations qui posent un problème de comparaison à un référent fixe sont la question 2 de la situation 2 (le référent est 10s), la situation 3 (les référents sont 2,85m et 8,5t) et enfin la situation 4 où le référent $\frac{1}{7}$ tient une place importante (il ne s'agit pas seulement de choisir la solution correspondant au plus grand nombre ; il faut aussi que ce nombre soit strictement inférieur à $\frac{1}{7}$.

4°)

a)
Si le 3$^{\text{ième}}$ fondeur était allé jusqu'au milligramme, on aurait eu six chiffres après la virgule : 0,142857 kg.

b)
Cette rencontre avec des décimaux ayant une partie décimale plus longue est peu courante au cycle 3. Elle pourrait survenir dans les situations suivantes :

- Utilisation de la calculatrice : celle-ci peut afficher des décimaux avec plus de six chiffres après la virgule.
- Exercices liés à la monnaie et à la conversion F - € (1€ = 6,55957F).
- Division de deux entiers avec quotient décimal et approximation décimale de celui-ci.
- Utilisation du nombre π et de ses valeurs décimales approchées dans des calculs d'aires et de périmètres.
- Exercices de conversion sur des unités de mesure (en particulier avec les mesures d'aires).

5°)

Lorsque le maître annonce à un élève, au cours d'une séance de saut en hauteur à l'école élémentaire : "Tu as sauté un mètre huit", il s'agit vraisemblablement, compte tenu des performances en saut en hauteur des élèves scolarisés à l'école élémentaire, de 1m et 8cm, soit 1,08m ou 108cm.

Les problèmes posés par l'oralisation des décimaux :
- Un problème d'interprétation du décimal oralisé : dans un autre contexte « un mètre huit » aurait pu signifier 1,8m ou 1,008m.
- Un problème de conceptualisation des décimaux : une oralisation du type « un mètre huit » ou du type « un virgule huit » renforce la conception erronée du décimal comme juxtaposition de deux entiers séparés par une virgule, avec toutes les conséquences déjà signalées sur la pratique opératoire et le rangement.

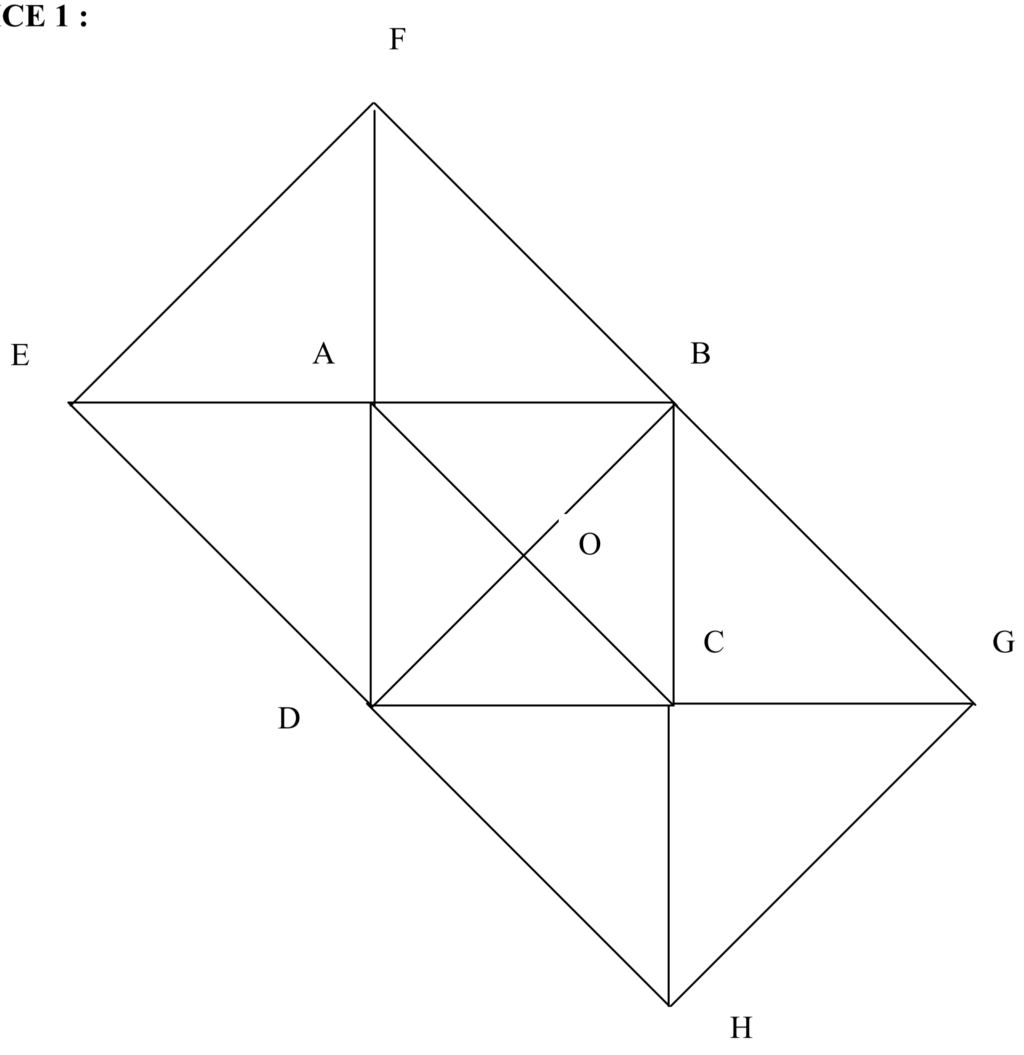
En cours d'apprentissage, on préférera des oralisations du type « trois unités vingt-sept centièmes » ou « trois unités deux dixièmes sept centièmes » pour le décimal 3,27 par exemple ; car celles-ci présentent l'avantage d'insister sur la signification des chiffres situés après la virgule dans l'écriture d'un décimal.
On pourra à la rigueur envisager une oralisation neutre : « trois virgule deux sept » pour 3,27 par exemple.

AMIENS

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 :



1°)
<u>1ère démarche possible</u> :
Cherchons à démontrer que le quadrilatère EFGH est un rectangle : nous montrerons qu'il s'agit d'un parallélogramme possédant un angle droit.

a) Est-ce un parallélogramme ?

Les droites (BC) et (AF), et les droites (AC) et (BF), sont parallèles (construction de F).
Un quadrilatère dont les côtés sont deux à deux parallèles est un parallélogramme donc le quadrilatère FBCA est un parallélogramme.

De la même façon, les quadrilatères ACHD, DEAC et ABGC sont des parallélogrammes.
Dans un parallélogramme, les côtés opposés ont même longueur, donc, avec chacun des 4 parallélogrammes précédents, on obtient : AC = FB, AC = HD, AC = ED et AC = BG
Par conséquent, (les points F, B et G étant alignés, de même que les points H, D et E), les segments [FG] et [EH], de milieux respectifs B et D, ont même longueur (égale à 2 AC).
De plus, les droites (FG) et (EH) sont parallèles (car toutes deux parallèles à la droite (AC)).

Un quadrilatère convexe ayant deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme, **donc EFGH est un parallélogramme**.

b) A-t-il un angle droit ?

En utilisant le parallélogramme DEAC, on obtient l'égalité des longueurs AE = DC
En utilisant le parallélogramme FBCA, on obtient l'égalité des longueurs AF = CB
En utilisant le carré ABCD, on obtient l'égalité des longueurs DC = AB = CB
Donc AE = AB = AF. Les points A, E et B étant alignés, on en déduit que le triangle EFB est inscriptible dans un demi-cercle de diamètre [EB]. Un triangle inscriptible dans un demi-cercle avec un diamètre comme côté est un triangle rectangle, par conséquent, le triangle EFB est un triangle rectangle en F. **L'angle $\widehat{EFB}$ est droit**.

Conclusion

Un parallélogramme ayant deux côtés perpendiculaires est un rectangle : le quadrilatère EFGH possède ces deux propriétés, il est donc rectangle.

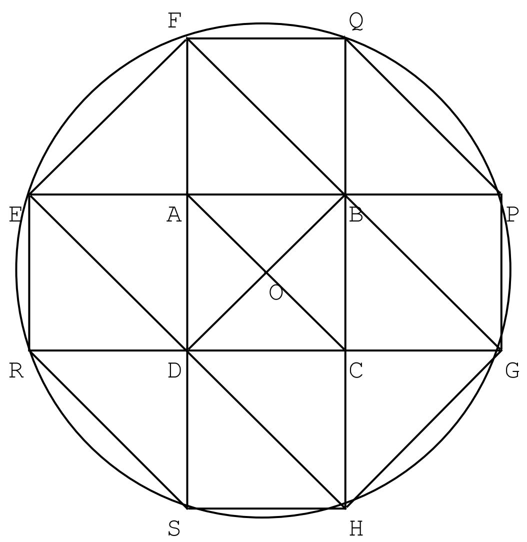
<u>Une des autres démarches possibles pourrait être</u> :
Quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
Les droites (BD) et (BF) sont perpendiculaires (avec les parallèles (BF) et (AC) ; et (BD) perpendiculaire à (AC) comme diagonale du carré ABCD)
$\widehat{FBD} = 90°$
ABCD est un carré : $\widehat{ABD} = 45°$
Ainsi $\widehat{FBA} = \widehat{FBD} - \widehat{ABD} = 45°$
$\widehat{BED} = \widehat{EBF}$ (comme angles alternes-internes avec les parallèles (ED) et (FB))
d'où $\widehat{BED} = 45°$. De la même façon $\widehat{EDA} = \widehat{AFB} = 45°$,
Les triangles AFB et EAD sont donc rectangles et isocèles : EA = AD = AB = AF
Le quadrilatère EFBD est donc un carré, il en est de même pour DBGH, et par conséquent, **EFGH est un rectangle.**

2°)
L'aire d'un rectangle est égale au produit des longueurs de deux côtés consécutifs. FG = 2 AC (voir question 1) or AC = AB x $\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté AB)
Le triangle EAF est isocèle rectangle en A : en effet, AE = AF et les droites (AE) et (AF) sont perpendiculaires (puisque ABCD est un carré), donc EF = AE x $\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré)
Comme AE = AB = 5 cm, alors l'aire du rectangle EFGH a pour mesure en cm^2 :
2 x 5 x $\sqrt{2}$ x 5 x $\sqrt{2}$ = 100. **Le rectangle EFGH a une aire de 100 cm^2.**

3°)
<u>$1^{ère}$ démarche possible</u> :

Le centre du cercle circonscrit à un quadrilatère est le point équidistant des 4 sommets. Dans un rectangle, le centre du cercle circonscrit (centre du rectangle), est le point d'intersection des diagonales ; celles-ci ont même longueur et se coupent en leur milieu.
Cherchons à montrer que O est le milieu des diagonales [FH] et [EG] :
FD = 2 AD = 2 BC = BH et les droites (FD) et (BH) sont parallèles donc le quadrilatère FBHD est un parallélogramme
Dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu, Or le milieu de [BD], l'une des diagonales, est le point O centre du carré ABCD donc O est le milieu de [FH]. De la même façon, en raisonnant à partir du parallélogramme EDGB, on obtient que O est le milieu de [EG]
Les diagonales du rectangle EFGH se coupent donc en O, d'où
O est le centre du cercle circonscrit au rectangle EFGH

Autre démarche possible :
Calculons les longueurs de OG, OF, OE et OH :
BGHD étant un carré, le triangle OBG est rectangle en B et donc $OG^2 = OB^2 + BG^2$ (théorème de Pythagore)
Or $BG = 5\sqrt{2}$ (question2) et OB = **Erreur !** donc OG^2 = **Erreur !** + BG^2 = **Erreur !** BG^2
OG^2 = **Erreur !** x 10 soit OG = **Erreur !**
De même, on montre que OF = OE = OH = **Erreur !** (avec les triangles OBF, ODE et ODH).
Ainsi OG = OF = OE = OH
Donc O est le centre du cercle circonscrit au rectangle EFGH
4°)
1ère démarche possible :



Les diagonales [AP] et [QC] du quadrilatère ACPQ se coupent en leur milieu B : donc il s'agit d'un parallélogramme ; par ailleurs, AB = BC : donc ces diagonales ont même longueur ; de plus elles sont perpendiculaires, puisque ABCD est un carré.
Par conséquent, ACPQ est un carré. De même, ACSR est un carré.
Il en découle que PQRS est un rectangle dont une médiane est [AC]
Le centre de ce rectangle est donc le milieu de [AC], c'est à dire le point O donc
OP = OQ = OR = OS
Les côtés [AF] et [BQ] du quadrilatère ABQF sont parallèles et de même longueur (égale à AB) : ce quadrilatère est un parallélogramme ; de plus les côtés [AB] et [AF] sont perpendiculaires.
Par conséquent, ABQF est un carré. De même, DCHS est aussi un carré
Il est clair alors que FQHS est un rectangle de centre le milieu de [FH], c'est à dire O (voir question précédente)
Les diagonales d'un rectangle ayant même longueur et se coupant en leur milieu, on en déduit que OF = OH = OQ = OS
Finalement, on obtient OF = OH = OQ = OS = OP = OR ; cette distance étant aussi le rayon du cercle circonscrit au rectangle EFGH, on en déduit que :
Les points P, Q, R, S sont sur le cercle circonscrit au rectangle EFGH.

Autre démarche possible :
Les triangles OBP et OCG sont superposables (puisque OB = OC = 5**Erreur !** , BP = CG = 5 et les angles $\widehat{}$,OBP et $\widehat{}$,OCG sont égaux (90° + 45°))
Donc OP = OG, et de la même façon OF = OQ (triangles OAF et OBQ), OE = OR (triangles OAE et ODR), OR = OS (triangles ODR et ODS) et OS = OH (triangles ODS et OCH).
Ainsi **OP = OQ = OF = OE = OR = OS = OH = OG**
5°) Le polygone EFQPGHSR est un octogone ; Sa surface peut se décomposer en 5 carrés superposables au carré ABCD, et 4 triangles superposables au triangle AEF ; chacun de ces triangles a une surface moitié de celle du carré ABCD
Donc l'aire du polygone EFQPGHSR mesure, en cm^2, 7 fois l'aire du carré ABCD, soit : 7 x 5^2 = 175

Le polygone EFQPGHSR a une aire de 175 cm^2

EXERCICE 2 :

Problème 1 : La décomposition en produits de facteurs premiers de 285 donne
285 = 3 x 5 x 19
285 admet donc 2 x 2 x 2 = 8 diviseurs (possibilité de prendre ou non chacun des trois facteurs) qui sont : 1 , 3 , 5 , 15 , 19 , 57 , 95 et 285.
Les nombres cherchés sont deux diviseurs de 285, dont le produit est égal à 285 : Par combinaison des facteurs premiers,

les seules solutions possibles sont donc :
1 et 285 billes ; 3 et 95 billes ; 5 et 57 billes ; 15 et 19 billes.

Problème 2 : La décomposition en produits de facteurs premiers de 2431 donne :
2431 = 11 x 13 x 17. 2431 admet donc 3 diviseurs premiers qui sont : 11 , 13 et 17.

Les nombres cherchés sont trois diviseurs de 2431, dont le produit est égal à 2431 : les 4 solutions possibles (à l'ordre près) sont donc :

1, 11 et 13 x 17   1,13 et 11 x 17   1, 17 et 11 x 13   11, 13 et 17.

En conclusion :

1,11 et 221 francs ; 1, 13 et 187 francs; 1, 17 et 143 francs; 11, 13 et 17 francs.

Problème 3 : Soit n le nombre de gagnants, alors (129 n + 28) < 4000 ,
soit 129 n < 3972
donc n < **Erreur !** et par conséquent, **n < 31**
Le nombre maximal de gagnants est donc 30, et de ce fait :

le montant maximal de la cagnotte est de 129 x 30 + 28, soit **3926 francs.**

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1°) Analyse des productions des élèves

		Description de l'erreur	Hypothèse sur son origine
Production correcte	Elève C		
Erreur de calcul avec un algorithme correct.	Elève E	2 + 3 + 5 + 7 = 18 au lieu de 17.	Répertoire additif mal maîtrisé ou erreur de «comptage ».
	Elève G	2 + 3 + 5 + 7 = 16 au lieu de 17.	idem.
Erreurs de retenues (technique opératoire mal comprise).	Elève A	Retenue de 1 au lieu de 2 sur le chiffre des dizaines.	Non compréhension de la retenue et habitude de rencontrer uniquement des retenues de 1.
	Elève B	Inversion entre le chiffre à poser et la retenue.	Non compréhension de la retenue, numération non maîtrisée.
	Elève D	Mauvais positionnement : pose systématique de la retenue au dessus du chiffre le plus à gauche.	Aucun sens donné à la retenue .
	Elève F	La retenue, bien placée, n'est pas utilisée.	Rôle non compris de la retenue.
	Elève H	Pose systématique des sommes par colonne.	méconnaissance du principe de la retenue.

2°)
- Connaissance de l'algorithme « en colonne » de l'addition de **trois** *nombres* Soit ; -
Connaissance des tables d'addition.
- Connaissance de la structure de l'écriture des nombres (numération) et de son lien avec la retenue.

SECOND VOLET (8 POINTS)

QUESTIONS RELATIVES À LA SÉQUENCE DU MARDI 14 MARS 2000 (ANNEXE 1)

1°)
Procédures de résolution : utilisation des tables de multiplication, reconnaissance de produits[1] emblématiques (4×25) et utilisation de la « règle des zéros généralisée » ($20 \times 80 = 16 \times 100$).
Pertinence de l'activité :
- temps limité, donc nécessité pour les élèves d'utiliser des procédures « expertes »
- les produits proposés comportent tous au moins un facteur multiple de 10, d'autres un facteur multiple de 100. ce qui permet de s'entraîner[2] à la mise en œuvre de la règle des zéros simple puis généralisée.
- préparation à l'activité suivante.

Propriétés implicitement utilisées :
- associativité de la multiplication : 6 x 20 = (6 x 2) x 10.
- commutativité de la multiplication (éventuellement : 5 x 3 = 3 x 5 ; 20 x 80 = 2 x 8 x 10 x 10))

2°)
Réponse attendue : **Distributivité** de la multiplication sur l'addition.[3]

3°)
Deux procédures de calculs sont possibles ; l'une peut paraître plus « rapide » que l'autre. (ex du problème 3: il est plus rapide de calculer 400 x 6 au lieu de
(250 x6) + (150 x 6)

4°)
Arguments POUR :
- dans chaque groupe, il pourra y avoir échange d'idées entre les élèves.
- les groupes distincts pourront (espoir du maître ?) proposer des procédures distinctes de résolution et donc permettre que l'utilisation de la « mise en facteur » soit objet de débat dans des groupes.
- 4 groupes, donc lors de la mise en commun, il n'y aura que 4 affiches à gérer.

[1] il sera plus difficile pour les élèves de reconstruire le résultat de 12 x 3 soit 36.
[2] Il s'agit d'un entraînement : cela suppose que cette règle soit déjà connue des élèves.
[3] Il est difficile de connaître la propriété utilisée alors que l'on ne dispose pas de travaux d'élèves (en annexe 1). La question semble mal formulée. On aurait pu (dû) demander : "quelle est la propriété visée au travers de ces trois problèmes ?"

Arguments CONTRE :

- 6 élèves par groupe, c'est beaucoup pour espérer un réel travail de chaque élève.
- les productions risquent de reprendre toutes la même procédure.

QUESTIONS RELATIVES À LA SÉQUENCE DU JEUDI 16 MARS 2000 (ANNEXE 2)

5°)
Objectif mathématique : utilisation de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

6°)
Réutilisation des conclusions de l'activité du 14 mars : (nous considérons que les observations ne portent que sur la phase 1 de l'activité.)
- Mise en évidence du « facteur commun ».
- Lorsque cela est possible, transformer une suite de calculs multiplicatifs en un seul peut être source de facilité.
- Exercices d'application de la propriété mise en évidence

7°)
Autre(s) exercice(s) portant sur la distributivité de la multiplication sur l'addition :

- dans un autre contexte (par exemple géométrique : calcul d'aire,….)
- calcul de deux manières distinctes d'un produit de deux nombres à deux chiffres (28 x 14) (selon que l'on décompose le 28 ou le 14).
- proposer une disposition un peu moins stéréotypée : par exemple :

(**40** x 42) + (44 x **40**) + (**40** x 34) = ?

8°)
Le professeur veut savoir, par une évaluation individuelle de chaque élève, si les règles enseignées lors du travail du 14 mars puis de la phase 1 du 16 mars sont utilisées correctement. Il s'agit d'un mode d'enseignement par l'exemple et l'imitation.

QUESTIONS RELATIVES À LA SÉQUENCE DU LUNDI 20 MARS 2000 (ANNEXE 3)

9°)
Procédure de résolution :
- décomposition des nombres
- utilisation de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

ex : calcul de 8 x 12 comme (8 x 10) + (8 x 2)

Remarque : les deux derniers produits (4 x 125 et 8 x 225) sont plus difficiles pour des élèves de CE2 dans le cadre d'un exercice de calcul rapide. Il s'agit d'une situation (s'ils ne connaissent pas un algorithme) complexe et qui nécessite un travail sur les écritures.

Pertinence de l'activité :

- nombres ne permettant pas un calcul « direct » (l'addition réitérée est trop coûteuse)
- utilisation des propriétés vue ou revue précédemment (associativité de la multiplication et distributivité de la multiplication sur l'addition).
- entraînement des élèves et évaluation rapide par le maître (à l'aide d'ardoises par le procédé dit de LA MARTINIERE)

10°)
procédures justes qui peuvent apparaître :
(1) 124 x 23 = 124 + 124 + … + 124
(2) 124 x 23 = 124 x (20 + 3) soit 2480 + 372
(3) 124 x 23 =(100 + 20 + 4) x 23 soit 2300 + 460 + 92
(4) 124 x 23 = (100 + 20 + 4) x (20 + 3) avec la somme des six produits partiels.
mais aussi des procédures erronées.

11°)
A partir de la procédure (2), le professeur pourra proposer le dispositif suivant :

$$\begin{array}{rl} 124 & \\ \text{x } 23 & \\ \hline 372 & \quad 124 \text{ x } 3 \\ 2480 & \quad 124 \text{ x } 20 \\ \hline 2852 & \quad 372 + 2480 \end{array}$$

Le professeur peut aussi se référer à une présentation (qui préfigure la présentation « per gelosia ») qui permettra de mieux faire le lien avec la procédure (4) :

On a :
124 = 100 + 20 + 4 ; 23 = 20 + 3 ;
124 x 23 = (100 + 20 + 4) x (20 + 3)
Qui peut se présenter selon :

100	20	4	
2000	400	80	20
300	60	12	3

2000+400+80+300+60+12 = 2852

QUESTIONS RELATIVES À L'ENSEMBLE DES 3 SÉQUENCES

12°)

Arguments POUR :

- utilisation du calcul rapide
- les élèves ont à résoudre des problèmes proposés sous forme d'énoncés écrits.
- volonté de faire comprendre la technique opératoire

Arguments CONTRE :

- l'enseignement d'une seule propriété, de façon aussi formelle ne correspond pas à l'esprit des programmes.
- La distributivité n'est pas découverte comme solution à un problème posé (sauf un petit débat sur la méthode plus rapide). Il s'agit d'un enseignement de type applicatif.
- les propriétés ne sont pas justifiées. Elles sont montrées dans un contexte souvent restrictif (nombre à droite).
- les initiatives laissées aux élèves sont très limitées : le travail est guidé.
- les élèves ne savent pas où ils vont.

BESANÇON

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES

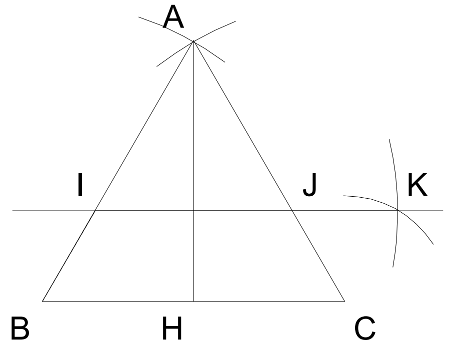
EXERCICE 1 (2 points)

Calculons l'aire totale (en m^2) de tous les logements de l'immeuble :
$(3 \times 35) + (2 \times 60) + (2 \times 75) + (3 \times 100) = 675$
Pour 675 m^2, le montant des charges est 131 450 F ;
Comme le montant des charges est proportionnel aux aires, nous pouvons calculer le montant par m^2, et multiplier ce montant par l'aire de chaque logement.
Montant des charges par m^2 : 131 450 : 675
Montant des charges pour un studio : (131 450 : 675) x 35 ≈ 6 815,925 ≈ **6 815,93F**
Montant des charges pour un F2 : (131 450 : 675) x 60 ≈ 11 684,444 ≈ **11 684,44F**
Montant des charges pour un F3 : (131 450 : 675) x 75 ≈ 14 605,556 ≈ **14 605,56F**
Montant des charges pour un F4 : (131 450 : 675) x 100 ≈ 19 474,074 ≈ **19 474,07F**

Remarque : ces calculs pouvaient être présentés dans un tableau :

Aires en m^2	35	60	75	100	675
Charges en F	6815,93	11 684,44	14 605,56	19 474,07	131 450

EXERCICE 2 (6 points)
QUESTION 1
a)
Aucune justification n'était attendue dans cette question. Nous en donnons toutefois une pour l'information du lecteur :
Construction de la droite parallèle à la droite (BC) passant par I :
On construit par exemple le 4$^{\text{ème}}$ sommet K du parallélogramme (CBIK) ; on l'obtient par intersection de 2 arcs de cercle, l'un de centre I et de rayon 4 cm et l'autre de centre C et de rayon BI.



b)
Les deux segments [IB] et [JC] ont même longueur ($4 - x$) (en cm) ;

Justification : on peut utiliser le théorème de Thalès dans les triangles ABC et AIJ, en effet les droites (IJ) et (BC) sont parallèles, I appartient à [AB] et J à [AC], d'où :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$$

Or AB = AC = BC (car ABC est équilatéral), donc AI = AJ = IJ = x.
Comme IB = AB – AI et JC = AC – AJ, on peut conclure que les segments [IB] et [JC] ont même longueur ($4 - x$) (en cm).

c) Le quadrilatère IJCB a deux côtés portés par des droites parallèles, c'est donc un trapèze ; de plus ses deux autres côtés [IB] et [JC] ont même longueur, <u>c'est donc un trapèze isocèle.</u>

QUESTION 2

a) Le triangle AHB est rectangle et HB = $\frac{BC}{2}$ = 2 (en cm), car une hauteur dans un triangle équilatéral est aussi une médiane.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH, on obtient alors :
$AH^2 = AB^2 - HB^2 = 16 - 4 = 12$, soit (en cm) :

$$AH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Remarque : il est possible d'appliquer directement la formule donnant la longueur h de la hauteur d'un triangle équilatéral dont le côté a pour longueur c : h =**Erreur !**

b) Soit H' l'intersection de (IJ) et de (AH),
(AH) étant perpendiculaire à (BC) est aussi perpendiculaire à (IJ), puisque (IJ) est parallèle à (BC), donc H' est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle AIJ et h=AH'.
appliquons le théorème de Thalès dans les triangles ABH et AIH':
$\frac{AH'}{AH}$ = **Erreur !** soit $\frac{h}{2\sqrt{3}} = \frac{x}{4}$ et on obtient (en cm) :

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

L'aire A du triangle AIJ peut alors s'obtenir par la formule "1/2 x base x hauteur" et est donc égale à : A = **Erreur !**$\times$ IJ $\times$ h = **Erreur !** $x \times \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ soit (en cm^2)

$$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

QUESTION 3

Calculons l'aire du triangle ABC : A(ABC) = (1/2) x 4 x $2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

On cherche s'il existe x tel que A = **Erreur !**$\times$ A(ABC), soit :

$\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$, d'où $x^2 = 8$

Donc il existe bien une valeur et <u>une seule</u> (car x exprimant une longueur, doit être positive) égale à (en cm) :

$$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

<u>Autres justifications possibles :</u>

<u>- pour 1-b :</u> on peut dire que le triangle AIJ est équilatéral car ses angles $\hat{I}$ et $\hat{J}$ valent 60° comme angles correspondants respectifs des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle équilatéral ABC, donc AI = AJ = x, d'où le résultat.

- <u>pour 2-b</u> : Nous avons vu dans 1-b que AI=AJ=IJ ; le triangle AIJ est équilatéral ; et l'on peut donc faire le même type de calcul que pour AH (cf 2-a) :

H', le pied de la hauteur issue de A est aussi milieu de [IJ] ; on a, dans le triangle rectangle AIH' : $AH'^2 = AI^2 - IH'^2 = x^2 - (x/2)^2 = 3x^2/4$. D'où l'on tire h :

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

Là aussi, on pouvait appliquer la formule donnant la hauteur d'un triangle équilatéral de côté x.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

QUESTION 1

Cet exercice peut être proposé <u>en cycle 1</u>, sans doute <u>en G.S.</u> (3ème année de ce cycle), éventuellement en fin de M.S., ou <u>en cycle 2</u> avec encore la G.S. (1ère année de ce cycle) et éventuellement en début de C.P.

C'est dans le programme de l'école maternelle que l'on peut trouver, dans "Approche du nombre" des justificatifs à ce type d'activité :

"*Progressivement, il* (l'élève) *apprend à construire un certain nombre de procédures et d'outils pour dénombrer les collections d'objets …*
comparaison de collections …"

et aussi dans les compétences relatives aux mathématiques :

" *… mettre en œuvre une procédure numérique (dénombrement, reconnaissance globale de certaines quantités …) ou non numérique (correspondance terme à terme …) pour : réaliser une collection ayant le même nombre d'objets qu'une autre collection, comparer des collections, …*"

Remarque : pour répondre à cette question, il vaut mieux avoir analysé d'abord la tâche demandée à l'élève dans cet exercice d'évaluation, et donc avoir examiné les questions suivantes.

QUESTION 2

a) Objectifs relatifs au champ mathématique :

• être capable de comparer 2 collections de croix dessinées dans une carte rectangle, en utilisant le nombre ou la correspondance terme à terme.
• être capable de modifier une collection pour la rendre équipotente à une collection donnée
On pouvait ajouter aussi : comprendre les notions de « autant » « il en manque » « il y en a trop » qui participent à l'élaboration du concept de nombre

b) Compétence transversale :

Savoir s'organiser dans une activité complexe : ici, il faut comparer successivement 9 cartes à une carte référence ; il ne faut pas « perdre le fil » : (oublier une carte), ou bien comparer deux cartes entre elles.
On pouvait mettre aussi :
Comprendre et respecter une consigne (dessiner ou barrer des croix).
Fixer son attention, se concentrer sur une tâche, savoir observer.
Se situer dans l'espace limité de la carte rectangle (pour l'observation de chacune d'elles).

QUESTION 3

La donnée des termes "cinq" ou "5" aurait pour conséquence d'attirer fortement l'attention de l'élève sur le nombre de croix et ainsi de l'inciter à utiliser ce nombre pour résoudre l'exercice.
- Or cet exercice permet des résolutions non numériques : reconnaissance du dessin formé par les croix dessinées dans la carte rectangle, ou correspondance terme à terme, (ou paquets à paquets). On peut donc penser que l'auteur de l'exercice n'a pas voulu éliminer ces procédures.
- D'autre part, même dans le cas de procédures numériques (perception globale ou dénombrement), l'auteur a pu préférer que ce soit l'élève lui-même qui se rende compte que le nombre peut être utile ici.

QUESTION 4

4-A
Les cartes proposées par Chloé correspondent bien aux consignes : elles ont toutes 5 croix. Ce n'est pas le cas pour les cartes de Pierre, qui ont toutes 6 croix ; et de plus, il a barré la carte qui avait plus de 6 croix, au lieu de respecter la consigne en barrant 1 croix pour réaliser la carte demandée.
4-B
On peut faire l'hypothèse que Pierre a utilisé une procédure numérique : il a dénombré la carte référence ; en se trompant, il a trouvé 6 au lieu de 5 ; puis il a successivement examiné les 9 cartes proposées, en comparant leur nombre de croix à 6 ; le fait qu'il n'ait pas reconnu

la carte n°3, identique au modèle, montre bien qu'il n'a pas contrôlé son travail par comparaison des cartes avec le modèle, mais qu'il a utilisé uniquement le nombre 6. On peut supposer qu'il a fait au départ une erreur de comptage (erreur dans la comptine, ou dans l'énumération de la collection)

SECOND VOLET (8 POINTS)

TRAVAIL PRÉLIMINAIRE (NON DEMANDÉ POUR L'ÉPREUVE) : ANALYSE A PRIORI DU PROBLÈME POSÉ AUX ÉLÈVES.

Il nous paraît difficile de répondre sérieusement aux questions posées sans avoir d'abord cherché soi-même à réaliser l'activité demandée aux élèves.
Nous vous conseillons donc, avant de commencer à lire le corrigé, d'examiner les 3 questions suivantes (quand vous aurez une classe, il faudra aussi vous poser ces 3 questions avant de proposer un problème...)

Les 3 questions :

1°) Quelles sont les réponses correctes ? quels sont les critères pour décider qu'une réponse est correcte ?
essayez de trouver quelques réponses correctes possibles, sinon toutes…
pour vous aider : que pensez-vous des réponses suivantes
« 1-2-8 » ? « 5-7-8-10 » ? « 8-2-6-9 » ? « 8-2-6-11 » ? « 2-10 » ?
quels critères pouvez-vous dégager ?

2°) Quelles difficultés les élèves vont-ils rencontrer ?
imaginez quelques modifications précises de l'ensemble des 11 phrases données, qui rendraient l'exercice beaucoup plus facile.
la consigne « et résous-le » vous paraît-elle nécessaire ?

3°) Comment procède-t-on pour trouver une réponse ?
quels sont les éléments qui permettent de trouver une réponse sans essayer toutes les combinaisons possibles de phrases ?

Éléments de réponse à ce questionnement :

1°) Réponses correctes, critères
« 1-2-8 » ne va pas bien parce que :
on ne commence pas un énoncé par une question, donc il faut mettre la phrase « 1 » à la fin ;
on ne commence pas un récit par un pronom défini (« la caissière » : quelle caissière ?), donc l'ordre « 8-2-1 » est plus satisfaisant ;
« 8-2-1 » est-il un bon énoncé ? oui, à condition de supposer que le nombre de places occupées est égal au nombre de billets vendus "samedi dernier", ce qui est légitime en l'absence d'indications contraires.
« 5-7-8-10 » doit aussi être remis en ordre : « 8-5-7-10 » est un bon énoncé.
« 8-2-6-9 » pourra être accepté aussi après discussion : il y a beaucoup de données inutiles ; ne pourrait-on pas supprimer « 8 » ? (non, cf. plus haut) et « 6 » ? (non, on ne comprendrait pas pourquoi on parle de spectateurs payants)
« 8-2-6-11 » est-il un problème puisque la réponse est dans l'énoncé ? C'est discutable, car il faut faire quand même certaines déductions.
« 2-10 » pourrait aller si l'on ajoutait « d'un cinéma » après « caissière » ; on pourra l'accepter, avec cette remarque, ou bien préférer « 8-2-10 » (mais on introduit une donnée inutile).

Autres exemples de réponses correctes :
8-2-6-10 8-3-7-10 8-4-7-10 8-4-1 (à suivre)

Critères qu'on peut dégager dans cette recherche de réponses :

- un énoncé est composé de quelques informations suivies d'une question ;
- les informations constituent un récit cohérent, et acceptable du point de vue du français.(ceci est discutable bien sûr) ;
- on peut répondre à la question posée en faisant un calcul à partir des informations fournies (calcul arithmétique, ou logique c'est-à-dire avec des déductions à partir des données).

2°) Difficultés
la complexité de la tâche : gestion d'un grand nombre de phrases non ordonnées, nécessité de faire des essais, de trouver une stratégie pour gérer ces essais ;
ici l'ordre des phrases rend la tâche difficile : une question en 1 ; et en 8 l'information par laquelle pratiquement tous les énoncés doivent commencer ;
la nécessité, quand on examine une possibilité, de bien isoler mentalement les phrases choisies, de faire abstraction des autres informations que l'on vient de lire ;
l'assimilation des mots « spectateurs, places, billets » : certains élèves penseront qu'il ne s'agit pas de la même "chose".
Modifications : cf. question 6 du corrigé.

La consigne « et résous-le » : elle est absolument nécessaire ; c'est en essayant de résoudre leur problème que certains élèves vont se rendre compte eux-mêmes que ce n'est pas possible ; la résolution constitue la validation de leur énoncé.

3°) Comment trouver une réponse ?
d'abord repérer les 4 questions et les informations, et chercher à réaliser un énoncé en combinant quelques informations et une question ;
ne pas mettre ensemble les phrases 2 et 4 (samedi et dimanche) pour avoir un texte cohérent.

LE CORRIGÉ

QUESTION 1

Les opérations mises en jeu dans les différents problèmes (addition, soustraction et multiplication) sont maîtrisées en général en fin de CE2.
Mais le domaine numérique (certains nombres-réponses dépassent 10 000) et surtout la complexité de la tâche demandée aux élèves dans cette activité, ne permettent de l'envisager qu'en deuxième partie de cycle 3, au CM2, ou en CM1.
Mais cela dépend bien sûr d'autres éléments que le simple énoncé de l'exercice, et en particulier :

- des activités conduites avant celle-ci sur les énoncés de problèmes ,
- de la façon dont l'activité est proposée (voir la question 6)

remarque : en fait, la situation provient du manuel de CM1 "Math Elem" (éd. Belin), ch. 15, page 35.

QUESTION 2

Cette situation s'inscrit dans le domaine « résolution de problèmes ».
On trouve dans les Instructions officielles de 95 :

« reconnaître, trier, organiser et traiter les données utiles à la résolution d'un problème ;
(…)
élaborer un questionnement à partir d'un ensemble de données. »
et il s'agit ici de choisir des données et une question pour fabriquer un problème que l'on puisse résoudre.

Remarque : en fait, c'est dans le texte sur les cycles, de 91, que l'on trouve le domaine « résolution de problèmes » et l'extrait ci-dessus ; mais ce texte peut être considéré comme complémentaire des IO de 95.

QUESTION 3

On peut reprendre les compétences énoncées précédemment en précisant :
1) Il faut d'abord savoir résoudre les différents problèmes envisageables
Bien sûr, il suffit en principe de savoir en résoudre un, mais si l'élève ne sait en résoudre que très peu, il risque de mettre beaucoup de temps pour trouver ceux qu'il sait résoudre.
Certains problèmes ne mettent en jeu qu'une opération : « 2-11 » (724 + 317) ; « 8-3-11 » (1250 - 175) ; « 4-7-10 » (1025×80) ; d'autres sont plus complexes : « 2-10 » [(724×100) + (317×50)] ou encore plus difficile « 8-3-7-10 » [$80 \times (1250 - 175)$].
Pour que l'élève puisse se centrer sur la recherche d'un énoncé, il nous paraît donc nécessaire qu'il maîtrise bien les trois opérations addition, soustraction et multiplication (sens et technique) dans le domaine des nombres entiers jusqu'à 100 000.
2) Il faut qu'il sache ce que l'on entend par « énoncé de problème » et qu'il puisse associer une question et les données nécessaires pour répondre à cette question.

QUESTION 4

1) Il faut principalement que l'élève soit capable d'envisager une recherche par tâtonnement : lire des phrases, en faire des combinaisons, changer éventuellement leur ordre, et en choisir d'autres s'il trouve que cela ne va pas. Et il faut qu'il soit capable de gérer les combinaisons de phrases de façon à ne pas essayer plusieurs fois les mêmes.
Par exemple, un élève très bien organisé lit la phrase « 1 », constate qu'il s'agit d'une question ; il essaie alors la combinaison « 2-1 », trouve que ça ne va pas ; il essaie « 3-1 » ; pense que ça ne va pas, essaie « 4-1 », se dit que ça pourrait aller s'il savait le nombre total de places ; continue à lire, élimine rapidement « 5 » ; « 6 » et « 7 » et trouve « 8 » qu'il garde ; et en relisant dans sa tête les 3 phrases, les met dans l'ordre « 8-4-1 » pour faire un énoncé.
Mais il s'agirait là d'un excellent élève ! Les autres feront probablement des essais d'une façon anarchique, au moins au début : par exemple, après avoir constaté que la combinaison « 2-1 » ne va pas, ils abandonneront « 2 » et « 1 » ; continueront avec « 3 » etc.

2) L'exemple précédent montre que l'élève doit aussi avoir des compétences relevant de la maîtrise de la langue :
il faut qu'il maîtrise suffisamment la lecture pour comprendre assez rapidement chaque phrase, la reconnaître très vite au fil des nombreuses relectures ;
il faut qu'il soit capable de repérer rapidement la cohérence ou la non cohérence d'un texte ;
Il faut qu'il sache distinguer sans hésitation les phrases affirmatives et les phrases interrogatives.

On peut ajouter aussi des compétences relatives au vocabulaire : être capable de chercher la signification de mots dans un certain contexte, ici une représentation artistique, avec les termes “place inoccupée, place vide, représentation, recette, billet” et avec l'expression « il n'y a pas eu une seule place de vide ».

QUESTION 5

La tâche prescrite par la consigne comporte deux parties :
- construire un énoncé de problème à partir des 11 phrases
- résoudre ce problème

Si l'objectif essentiel est de développer la capacité à résoudre des problèmes, on peut considérer que cet objectif est atteint si :
1) pour l'énoncé : il comporte une seule question, et des données permettant de répondre à cette question en faisant un calcul ou un raisonnement logique.
2) pour la résolution : l'élève a choisi les bonnes opérations.
La cohérence du texte (ordre des phrases, phrase « 8 » en début d'énoncé par exemple, histoire compréhensible,) et l'absence de phrases inutiles, pourront être considérés comme des objectifs secondaires.
De même, l'exactitude des calculs, si elle constitue un « plus », parait ici secondaire.

QUESTION 6

Trois éléments que l'on peut faire varier dans la perspective d'une différenciation pédagogique :
- la possibilité de découper les phrases et de les manipuler facilite beaucoup la résolution : l'élève peut ainsi matérialiser la combinaison choisie, l'isoler des autres phrases, lire plus facilement le texte ainsi formé. Il peut commencer par isoler les 4 questions. Certains élèves pourraient ainsi être autorisés à découper.

dans le cas où le découpage n'est pas possible, l'ordre dans lequel les phrases sont données peut être un élément de différenciation : par exemple, ici, on pourrait faciliter la recherche pour certains élèves en mettant, pour eux, les 4 questions à la fin, et en premier le « 8 » qui vient au début de tous les énoncés.
- le vocabulaire utilisé : par exemple, pour trouver « 8-2-1 », l'élève doit envisager de retrancher un nombre de « billets » à un nombre de « spectateurs » pour trouver un nombre de « places » ; une reformulation des phrases, pour certains élèves, avec uniquement le mot « places », leur permettrait de ne pas buter sur cette difficulté.

Autres réponses possibles :
Le premier élément nous parait essentiel. Mais à la place des deux autres, on pouvait citer :
- le nombre de phrases proposées : un nombre plus réduit diminuera le nombre d'essais.
- le nombre de questions parmi les phrases proposées (ici 4) : en réduisant ce nombre, éventuellement à 1, on faciliterait le travail de certains élèves, qui auraient seulement à chercher les données nécessaires à cette question.
- la structure mathématique des énoncés possibles : nature et nombre des opérations mises en jeu ; on pourrait pour certains élèves ne garder que les phrases qui conduisent à des problèmes avec une seule opération, plus facilement repérables.

• la taille des nombres, en particulier le nombre maximal de spectateurs : de grands nombres peuvent être un obstacle pour des élèves en difficulté, bien sûr pour les calculs, mais surtout pour les anticipations mentales nécessaires à l'organisation d'un énoncé. De même la valeur du prix des places et le nombre de prix différents.
• la présence de phrases inutiles pourraient être envisagée pour les meilleurs élèves : elle perturberait leur recherche.

Bordeaux, CAEN, clermont, NANTES, ORLéANS-TOURs, Poitiers, rennes

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS) MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

Nous désignerons par $\overline{abc}$ le nombre recherché :

- La différence entre $\overline{abc}$ et $\overline{cba}$ est 297 : $\overline{abc} - \overline{cba} = 297$

ce qui revient à : $100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 297$

$99a - 99c = 297$

$a - c = 3$

- La somme des trois chiffres est 11 : $a + b + c = 11$
- La somme du triple du chiffre des centaines et du double du chiffre des dizaines est 22 : $3a + 2b = 22$

Il s'agit donc de résoudre, dans l'ensemble des entiers naturels, le système suivant :

(1) $a - c = 3$	$a = 3+ c$
(2) $a + b + c = 11$	$a + b = 11 - c$
(3) $3a + 2b = 22$	

Exemple de résolution :
de (3) on déduit : $a + 2a + 2b = 22$. en substituant a (en partant de (1) et (a + b) en partant de (2), on obtient dans (3) : $3 + c + 2(11-c) = 22$; donc $c = 3$.
de (1) on déduit alors $a = 6$.
de (2) on déduit alors $b = 2$.

le nombre est donc : 623.

Autre démarche possible :

$$\begin{array}{rccc} & c & d & u \\ - & u & d & c \\ \hline & 2 & 9 & 7 \end{array} \quad \text{donc on a} \quad \begin{array}{rccc} & u & d & c \\ + & 2 & 9 & 7 \\ \hline & c & d & u \end{array}$$

En examinant les dizaines, on voit qu'il y a obligatoirement une retenue qui provient de l'addition des unités (il ne peut y avoir ni $d+9=d$ ni $d+9=10+d$; en revanche, $1+d+9 = 10+d$ est vraie quelle que soit la valeur de d).
On a donc, en considérant l'addition des unités : $c+7 = 10+u$ soit $c = u+3$.
On peut examiner tous les cas possibles en tenant compte du fait que la somme des trois chiffres est 11 :

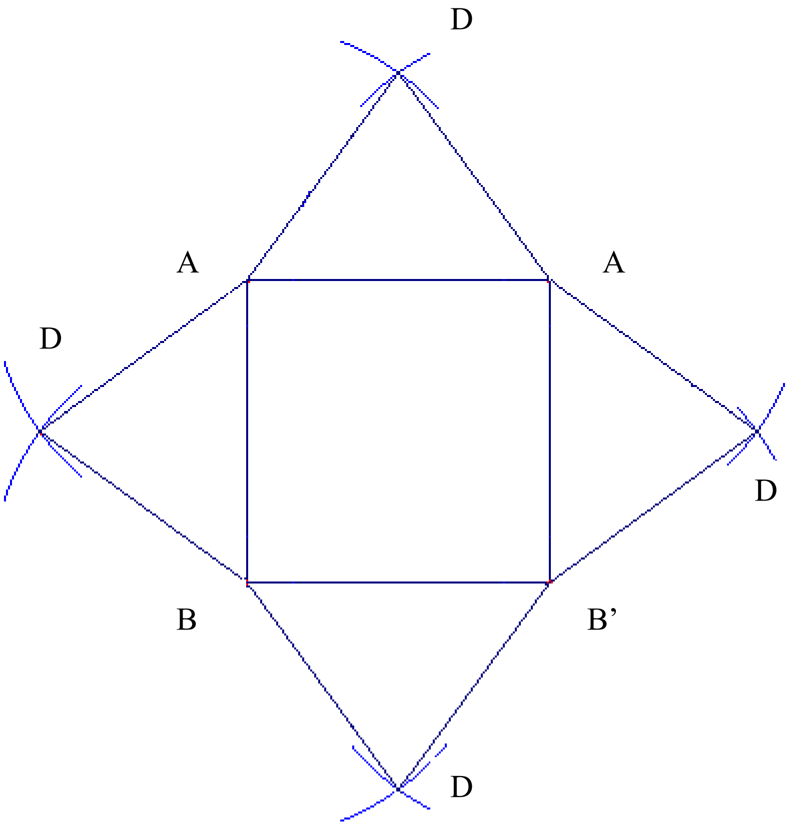
u	c	d	3c+2d
0	3	8	25
1	4	6	24
2	5	4	23
3	6	2	22
4	7	0	21
5	8		
6	9		

La seule possibilité pour que l'on ait « la somme du triple du chiffre des centaines du double du chiffre des dizaines est 22 » est de prendre u = 3, c = 6 et d = 2.
Le nombre 623 vérifie-t-il les conditions de l'énoncé ?
623 - 326 = 297 6 + 2 + 3 = 11 $(3 \times 6) + (2 \times 2) = 22$
On conclut que 623 est le nombre cherché.

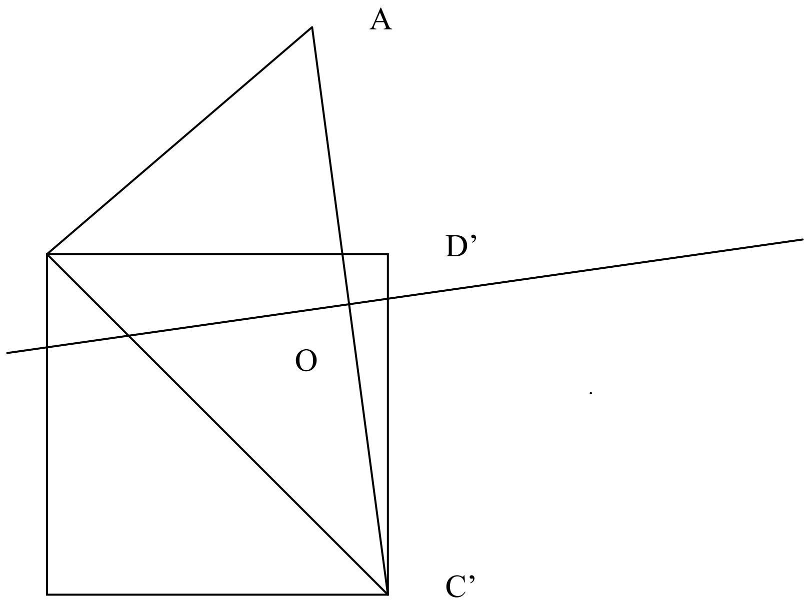
EXERCICE 2

QUESTION a)
Calculons la longueur AO comme moitié de AC' (en effet O centre du cube est aussi milieu de [AC'])
Les segments [AC'], [A'C], [B'D], et [BD'] sont isométriques
Cherchons la longueur du segment [AC']. Pour cela, nous nous servirons du fait que le triangle ADC' est rectangle en D : (AD) est perpendiculaire au plan DD'CC' : ((DD') et (DC)), donc (AD) est perpendiculaire à toute droite de ce plan passant par D et en particulier à (DC')).
En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ADC',
il vient : $AC'^2 = AD^2 + DC'^2$ (1).
Or DC' est une diagonale d'un carré de côté 4 cm
Les longueurs sont exprimées en cm.
donc $DC'^2 = 16+16 = 32$.
Avec (1) : $AC'^2 = 16 + 32 = 48$
$AC' = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
Donc $\boxed{\textbf{A0} = 2\sqrt{3}\ \textbf{cm}}$

Construction du patron :
Une valeur approchée au mm près par défaut de $2\sqrt{3}$ cm est 3,4 cm.
Il suffit donc de construire le carré de côté 4 cm et à partir de chacun de ses côtés les quatre triangles isocèles de 3,4 cm de côté selon la disposition suivante.



Remarque : l'explication de la construction géométrique d'un segment d'une longueur de $2\sqrt{3}$ cm n'est pas demandée. Voici toutefois comment on peut construire cette longueur OA :

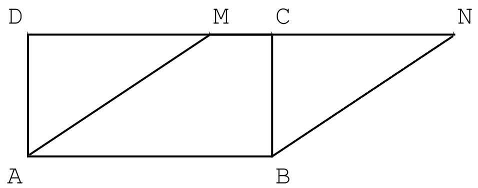


DCC'D' est le carré de base de côté 4cm.
C'DA est rectangle en D et DA = 4cm : on peut construire le point A à l'aide de l'équerre et du compas (DA =DD').
Il suffit alors de construire le milieu O de AC' en traçant la médiatrice à la règle et au compas.
On a alors **OA = 2 $\sqrt{3}$ cm**. (Dans le triangle DAC', on a : $DC'^2 + DA^2 = AC'^2$, c'est à dire : $(2\times4^2) + 4^2 = AC'^2$. D'où $AC'^2 = 3\times4^2$; donc AC' = 4 $\sqrt{3}$ cm)

QUESTION b)
Le cube est constitué de 6 pyramides identiques à la pyramide OABB'A'. Le volume de la pyramide est donc égal à **Erreur !** cm^3, soit 10667 mm^3 (à un mm^3 près par excès).
En l'absence de précision on acceptera bien sûr aussi 10666 mm^3(à un mm^3 près par défaut).

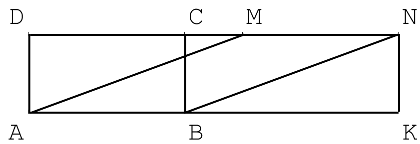
EXERCICE 3

QUESTION 1 :
1a)
Il n'est pas demandé de justifier la construction.

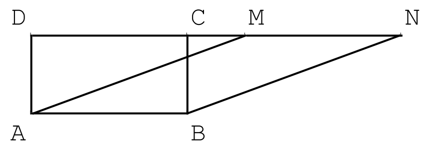


aire (ABCD) = aire(ABNM) -aire(BNC) + aire(AMD).
Ces deux dernières aires sont égales (triangles isométriques car BC=AD ; AM=BN et DM = CN)
BC= AD (car ABCD rectangle), AM = BN (car ABNM parallélogramme)
Montrons que DM = CN :
DC = AB (car ABCD rectangle) et AB = MN (car ABNM parallélogramme)
d'où DC = MN soit comme M est un point de [DC] DM + MC = MC + CN
soit DM =CN
Conclusion : aire (ABCD) = aire (ABMN)

1b)
Première solution :
aire (AKND) = aire (AMD) + aire (ABNM) + aire (BKN) (1)
Les deux triangles BKN et AMD sont isométriques
aire (AMD) = aire (BKN)
(1) devient :
aire (AKND) = aire (ABNM) + 2 aire (BKN)
or 2 aire (BKN) = aire (BKNC) (triangles isométriques dans le rectangle BKNC) donc
aire (AKND) = aire (ABNM) + aire (BKNC)
Or aire (AKND) = aire (ABCD) + aire (BKNC), donc :
aire (ABCD) = aire (ABNM).

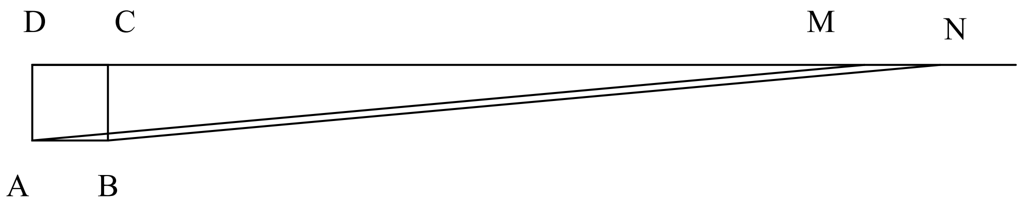


Deuxième solution *(l'utilisation du point K suggérée par l'énoncé n'est pas nécessaire) :*



aire (ABND) = aire (ABCD) + aire (BNC)
aire (ABND) = aire (ABNM) + aire (AMD)
Or aire (AMD) = aire (BNC) (triangles rectangles isométriques : BNC translaté de AMD dans une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$)
Donc **aire (ABCD) = aire (ABNM).**

1c)
Première approche :



On peut construire un carré ABCD de côté 1 cm, puis placer un point M sur la droite (DC) tel que AM soit supérieur à 10 cm (il suffit pour cela de tracer un cercle de centre A et de rayon supérieur à 10 cm. Ce cercle coupe la droite (CD) en deux points puisque la distance de son centre A à la droite (CD) est inférieure au rayon), puis construire le point N tel que ABMN soit un parallélogramme.
D'après la question 1b), les quadrilatères ABNM et ABCD ont même aire donc l'aire du parallélogramme ABNM est de 1 cm^2
Le périmètre du parallélogramme ABNM est supérieur à 20 cm puisque, par construction, deux des côtés ont une longueur supérieure à 10cm.
Le parallélogramme ABNM vérifie donc les conditions requises.

On pourrait construire un parallélogramme dont l'aire serait 1 cm^2 et dont le périmètre serait supérieur à 1 m : il suffirait de reprendre la construction précédente en plaçant M sur la demi-droite (CD) à plus de 50 cm du point D (AM étant supérieur à DM, AM serait ainsi supérieur à 50 cm).

Deuxième approche : (un rectangle est un parallélogramme).

Il suffit de construire un rectangle de côtés L=10cm et l=0,1cm par exemple. L'aire est 1 cm² et le périmètre est 10+10+0,1+0,1 = 20,2 cm.
Ce rectangle est un parallélogramme qui répond à la question.
aire de 1cm² et un périmètre supérieur à 1 m : **du point de vue théorique, c'est tout à fait possible,** il suffit de concevoir un rectangle (qui est un parallélogramme) de mesures :
L=100 cm et l = 0,01cm (soit un dixième de millimètres). On a alors P = 200,02 cm (soit un périmètre supérieur à 1 m) et A = 1 cm^2.

QUESTION 2 :

2a)
On sait que l'aire du rectangle est obtenue en effectuant le produit longueur (L) par largeur (l).
Soit p le demi-périmètre. Sachant que la somme L + l vaut p, l'aire est :
a x (p - a). (1).

Prenons l'expression S = $\frac{p^2}{4} - \left(a - \frac{p}{2}\right)^2$. Elle s'écrit aussi :

S = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{p}{2}\right)^2$. Il s'agit de la différence de deux carrés. En utilisant l'identité associée, on a : S = $\left(\frac{p}{2} + a - \frac{p}{2}\right)\left(\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2}\right)$, soit S = a(p - a). On retrouve bien l'expression (1).

2b)
l'expression S est maximale lorsque $\left(a - \frac{p}{2}\right)^2$ est nulle, soit pour a = **Erreur !** et donc S = $\frac{p^2}{4}$. L'aire du carré de côté $\frac{p}{2}$ répond à la question.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Pour information, vous trouverez en page 185 les résultats et commentaires de l'évaluation nationale relative à cet exercice proposé aux élèves. Cet exercice ne fût pas repris dans les évaluations ultérieures.

1°- Quelles compétences peuvent être évaluées ?
- Savoir trier des informations,
- Savoir ce qu'est un triangle,
- Savoir utiliser la désignation ABC,
- Savoir différencier un point et sa désignation,
- Savoir joindre deux signes à la règle,
- Savoir qu'un couple de lettres désigne un côté du triangle,
- Savoir ce qu'est le milieu d'un côté,
- Savoir utiliser un quadrillage pour positionner le milieu d'un côté.

2°- Analyse des réponses

Analyse de la réponse par rapport à la maîtrise des compétences :

Compétences	**A**	**B**	**C**	**D**
- Savoir trier des informations,	**x**	**x**	**x**	**x**
- Savoir ce qu'est un triangle,			**x** **(?)**	
- Savoir utiliser la désignation ABC d'un triangle ,				
- Savoir différencier un point et sa désignation,		**x**		**x**
- Savoir joindre deux signes à la règle,		**x**	**?**	**x**
- Savoir qu'un couple de lettres désigne un côté du triangle,		**?**	**x**	**?**
- Savoir ce qu'est le milieu d'un côté			**?**	
,- Utiliser un quadrillage pour positionner le milieu d'un côté.				

Elève	Analyse de l'erreur éventuelle
Elève A	L'élève joint tantôt les lettres, tantôt les points. On peut penser que la désignation n'est pas un outil disponible : Il conçoit un triangle comme un parcours qui le mène de A à B puis de B à C. Par ailleurs, « milieu » semble avoir le sens de « point sur segment ».
Elève B	Du point de vue de la connaissance du triangle, celui-ci semble s'identifier à un parcours qui consiste à passer par trois points, mais il ne les prend pas dans l'ordre de lecture. (on peut supposer qu'il a commencé par A, puis a joint le point le plus proche de A).
Elève C	L'élève hésite entre les lettres et les points (est-ce seulement une difficulté due au tracé ou la confusion point, lettre ?). Le « milieu » semble avoir le sens de « point sur segment ».
Elève D	Il conçoit un triangle comme un parcours qui le mène de A à B puis de B à C. Le milieu s'identifie comme l'appartenance d'un point au secteur angulaire : « entre BA et BC », un peu comme on dit : « je suis au milieu du terrain »…

3°- Elèves A, B et D
Cet exercice ne permet pas d'être sûr que les élèves A, B et D ne connaissent pas le « triangle ». Chacun de ces élèves joint, à sa manière, les trois points concernés. De plus, le point D n'est jamais utilisé.
Nous avons vu que les questions de désignation avec les conventions d'usage sont sans doute, pour une bonne part, dans l'incompréhension de la consigne, et donc expliquent en partie, les erreurs, ce qui ne permet pas de préjuger de la connaissance ou non du mot « triangle » dans son utilisation habituelle en CE1-CE2.

Remarque : La désignation des figures en géométrie à l'école élémentaire ne fait pas l'objet d'un enseignement systématique puisqu'elle ne fait pas partie des programmes.

Annexe proposée : (document extrait des résultats des évaluations 1994).

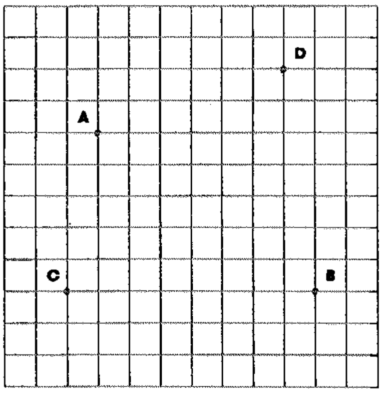
Exercice 8

Objectif 8

Tracer une figure à partir de consignes.

Activité

Tracer un triangle ABC. Placer le milieu d'un côté.



- Trace le triangle ABC.

- Place le point I au milieu de BC.

Résultats (en %)

Triangle ABC (item 12)

Tracé exact du triangle	**67,3**
Tracé de deux segments seulement (AB et BC)	19,1
Autres réponses	12,7
Absence de réponse	0,9

Point I (item 13)

Point I situé correctement (marqué et nommé)	**33,0**	} 45,4
Point situé correctement mais non nommé	**12,4**	
Autres réponses	41,7	
Absence de réponse	12,9	

Commentaire

Certains élèves ont pu rencontrer des difficultés au cours de cet exercice.

On peut notamment remarquer qu'un élève sur cinq confond le chemin ABC avec le triangle ABC, ne traçant alors que deux côtés.

Le sens du mot milieu peut être encore vague pour eux. Le milieu est souvent, pour des enfants de cet âge, situé à l'intérieur d'une figure ou entre les deux extrémités d'un segment (confusion milieu/entre). L'observation des cahiers permettra de dire si les 42 % d'erreurs à l'item 13 sont dus à cette confusion.

De même, la notion de point n'est pas encore forcément saisie : la confusion peut être fréquente entre le point et la lettre qui le désigne.

Le point D, déjà tracé sur le quadrillage, constitue de surcroît un élément parasite puisque cette donnée supplémentaire n'est pas pertinente pour effectuer l'exercice proposé. La présence d'éléments parasites ne doit pas être considérée comme un piège mais comme un élément nécessaire de tri d'informations.

Il semble que ce type d'activité reste à développer. Il est rappelé ici également tout l'intérêt qu'il y a à insister sur la qualité du matériel : crayons bien taillés, règle en bon état.

SECOND VOLET (8 POINTS)

1 - Questions sur l'ensemble de l'extrait du manuel

a) Niveau d'enseignement :
Les activités qui peuvent être construites à partir des deux pages de ce manuel relèvent du cycle trois et plus précisément du CM2 : en effet, il s'agit de calculer des aires à l'aide de mesures de longueurs exprimées le plus souvent en cm, mais aussi sous la forme « 3m20 » par exemple.
D'ailleurs, l'exercice du haut de la page annexe 3 met en jeu des nombres décimaux et leur produit par 10, 100, 1000 : nous sommes en fin de scolarité primaire.

b) Notions minimum :
Il s'agit de notions mathématiques :
- Connaissance de la notion de périmètre et de sa mesure à l'aide des unités usuelles du système métrique,
- Connaissance de la notion d'aire et de sa mesure à l'aide des unités usuelles du système métrique.

Mais aussi,
- Faire un schéma pour argumenter (question b de l'activité 2 de la page annexe 2).
- Faire un travail d'optimisation à l'aide d'un schéma. (Question c).
- Savoir résoudre l'équation 3m20 $\times$? = 16 m^2 d'une façon ou d'une autre, étant entendu que la calculatrice est acceptée (voir livre du maître).

2 - Question sur la partie : « je découvre[4] »

a) Activité 1

La part de l'activité de l'élève[5] :
L'élève doit calculer le périmètre et l'aire de 5 planches de timbres.
Pour le calcul du périmètre, il doit synchroniser un dénombrement de largeurs de timbres et de longueurs de timbres avec les données 4cm et 3 cm.
Pour les aires, il peut dénombrer les timbres et partir du calcul de l'aire d'un timbre ou bien décomposer les planches en différents rectangles et calculer les aires.
La question : que remarques-tu ? l'incite à mettre en relation les résultats obtenus pour formuler une conclusion.

---

[4] Remarque : Deux activités sur fichier comme séquence de découverte mériteraient réflexion. En particulier, le deuxième problème va demander beaucoup de temps et d'énergie pour se représenter une situation peu familière pour les élèves
[5] La question signifie implicitement que le professeur imaginerait l'activité de l'élève uniquement au travers de la lecture du manuel…

La question : « que remarques-tu ? »,
Si l'on se réfère au livre du maître , il s'agit « de lutter contre la tendance à penser qu'aire et périmètre d'une figure plane varient dans le même sens ».

Les planches sont telles que :

	A	B	C	D	E
périmètre	52 cm	52 cm	58 cm	44 cm	58 cm
aire	120 cm²	108 cm²	108 cm²	96 cm²	84 cm²

Donc la réponse attendue (d'après le livre du maître) est « les aires et les périmètres ne varient pas dans le même sens ».

Remarque : Il semble que cela soit la réponse attendue, mais les élèves percevront-ils la notion de variables liées ?

Les réponses seront plutôt :
« On a 52 et deux fois un périmètre de 58 et on a deux fois une aire de 108 ».
« A et B ont le même périmètre et pas la même aire. »
« B et C ont la même aire et pas le même périmètre ».
« D a un périmètre plus petit que E et pourtant son aire est plus grande. »
« A a un périmètre plus petit que E et pourtant son aire est plus grande. »
« les planches B et C ont la même aire et ne sont pas pareilles ».
« Les planches A et B ont le même périmètre et ne sont pas pareilles. ».
(Remarques justes qui peuvent être reprises pour une synthèse.)

Consignes possibles :
- Une consigne consisterait à demander à ranger les planches selon l'ordre croissant des périmètres et de faire constater si l'ordre est croissant pour les aires.
- Même consigne qui demanderait à ranger selon l'ordre croissant des aires.
- Une nouvelle activité consisterait à fixer (périmètre ou aire) et faire varier la forme de la planche pour obtenir (resp.) des aires et des périmètres différents.

b) Activité 2 question a
Voici différentes réponses possibles :
Réponse 1 :
Avec la calculatrice (voir livre du maître). Il s'agit alors d'utiliser la touche « ÷ »

Réponse 2 : par addition et contrôles successifs :
« 3,2+3,2+3,2+3,2+3,2 = 16 donc 5m »

Réponse 3 : par essais multiplicatifs par un entier (la longueur est un nombre entier de mètres).
« L'aire du rectangle est L x l, donc 16 = 3,2 x ?. 5 x 3,2 vaut 16 donc la réponse est 5 m »

Réponse 4 possible : si les élèves ne convertissent pas 3m20 en 3,2
3+3+3+3+3 = 15 avec un traitement juste des « restes » 20+20+20+20+20.

3a)
Questions sur les exercices 1, 2 et 4

3a)
Apports de chaque exercice :

L'exercice 1 consiste à faire varier longueur et largeur de telle façon que le périmètre soit constant. Ce faisant, l'élève constate que l'aire est maximale pour le rectangle R6. Le cas du carré peut donc être abordé.
Mais si on continue (R7), l'aire continue-t-elle d'augmenter ? L'aire est maximum sur le dernier rectangle qui est un carré.

L'exercice 2 : Réinvestissement de l'exercice 1 dans un cadre de représentation géométrique, mais l'élève doit avancer la solution « 4 sur 4 » pour répondre à b), alors qu'il aura pu, en a) choisir d'autres exemples.

L'exercice 4 : Traite de la même problématique de la liaison aire et périmètre à partir d'un rectangle imposé, avec support du dessin. L'élève peut donc, par un travail, imaginer ou/et construire un rectangle R2. Le travail est essentiellement calculatoire.

En quoi ces exercices sont -ils complémentaires ?
L'exercice 1 est très modélisant. Les exercices 2 et 3 sont plus ouverts et supposent un réinvestissement du 1.

3b)
La conclusion :
«Lorsque des rectangles ont le même périmètre, ils n'ont pas forcément la même aire. »
« Parmi les rectangles ayant même périmètre, celui qui a la plus grande aire est le carré. »
« En modifiant ses dimensions, on peut diminuer l'aire d'un rectangle tout en augmentant son périmètre »

4) Prolongements :
Les trois notions : proportionnalité, périmètre, aire.
Un exemple :
« On a pris une photo d'un rectangle. Sur cette photo, le rectangle mesure 12 cm sur 10 cm. Calcule le périmètre et l'aire de ce rectangle.
On effectue un agrandissement de cette photo. Le côté qui mesurait 12 cm fait maintenant 18 cm.
Quelle est la mesure de la nouvelle largeur ? Quel est le nouveau périmètre, la nouvelle aire ? Comment passe-t-on des anciennes mesures aux nouvelles ? ».

Creteil, paris, versailles

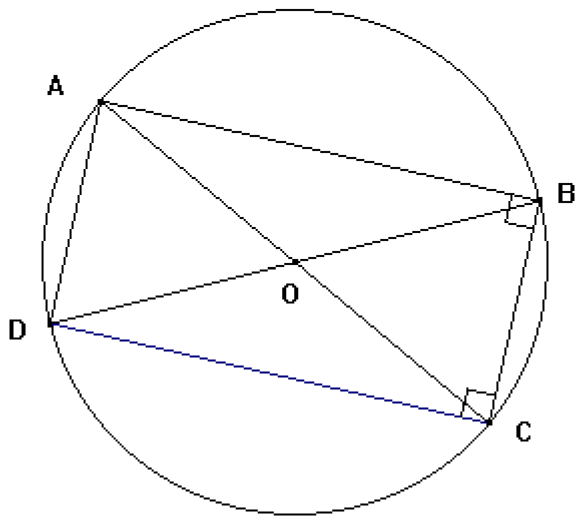
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

1)
Placer deux points distincts A et B sur le cercle $\mathcal{C}$.
Tracer la corde [AB].
Tracer la perpendiculaire à [AB] passant par B ; elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point C.
Tracer la perpendiculaire à [BC] passant par C ; elle coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point D.
Le point O est l'intersection des segments [AC] et [BD].

2)
Par construction le triangle ABC est rectangle en B donc son hypoténuse [AC] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.
De même, le triangle BCD est rectangle en C, donc son hypoténuse [BD] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$.
Les deux diamètres [AC] et [BD] se coupent nécessairement en O, centre du cercle.

3)



<u>1ère méthode</u> :

Le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui sont des diamètres du cercle $\mathcal{C}$, donc elles sont de même longueur et se coupent en leur milieu. ABCD est donc un rectangle.

2$^{\text{ème}}$ méthode :

Le triangle ADC est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et a pour côté [AC] qui est un diamètre du cercle, donc ce triangle est rectangle en D. Ainsi le quadrilatère ABCD possède au moins 3 angles droits ; c'est un rectangle.

4)a)
1$^{\text{ère}}$ méthode :
ABCD est un carré donc AB = BC et on sait que OC = 5 cm.
Dans le triangle ABC rectangle en B, par la propriété de Pythagore, on a :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

D'où $\quad 2\,AB^2 = AC^2 = 100$

D'où $\quad AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

On obtient ainsi :

- soit une valeur approchée par défaut au dixième près de AB : AB = 7cm
- soit une valeur approchée par excès au dixième près de AB : AB= 7,1cm

2$^{\text{ème}}$ méthode :
On sait que la diagonale d'un carré de côté a vaut a $\sqrt{2}$.
Or ici [AC] est la diagonale du carré ABCD et on sait que AC = 10 alors on peut écrire :

$$AC = 10 = AB\sqrt{2} \quad \text{on en déduit que } AB = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

On en déduit les mêmes valeurs approchées trouvées avec la première méthode.

b) L'aire de la partie du disque, extérieure au carré, s'obtient en soustrayant l'aire du carré à l'aire totale de disque.
L'aire du carré : $\mathcal{A}_1 = AB^2 = 50$
L'aire du disque : $\mathcal{A}_2 = \pi \text{ x } OA^2 = \pi \text{ x } 25$

D'où l'aire cherchée vaut :

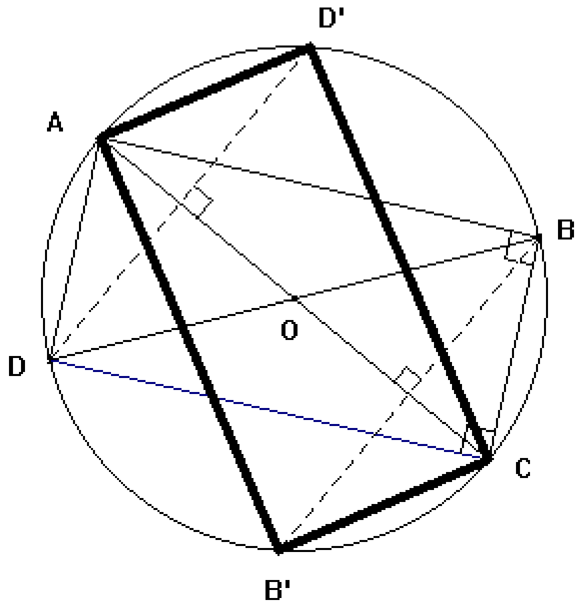
$$\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 = 25\pi - 50$$

On donne alors comme valeur de $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1$:

- soit une valeur approchée par défaut au mm^2 près : 28,53 mm^2
- soit une valeur approchée par excès au mm^2 près 28,54 mm^2

5) a)
Construction de la figure

Les symétriques des points B et D pourront être construits :
- soit avec l'équerre non graduée et le compas ;
- soit uniquement avec le compas.



b) <u>1ère méthode</u> :

Tout diamètre du cercle $\mathcal{C}$ est un axe de symétrie de ce cercle.

[AC] étant un diamètre du cercle $\mathcal{C}$, le symétrique par rapport à [AC] de tout point de ce cercle sera sur le cercle.

B et D étant deux points du cercle $\mathcal{C}$, leur image B' et D' seront sur le cercle $\mathcal{C}$.

<u>2ème méthode</u> :

Comme la symétrie orthogonale conserve les angles, l'image du triangle rectangle ABC est un triangle rectangle AB'C, ayant pour hypoténuse un diamètre du cercle. Ainsi le triangle AB'C est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$, donc B' est sur le cercle.
Même démonstration pour le triangle ADC et son image AD'C.

<u>3ème méthode</u> :

B' étant le symétrique de B par rapport à [AC], alors la droite (AC) est la médiatrice du segment [BB']. O appartenant à cette médiatrice, on a OB' = OB.

B appartenant au cercle $\mathcal{C}$, alors OB est égal au rayon du cercle $\mathcal{C}$. OB' étant égal lui aussi au rayon du cercle, alors le point B' est sur le cercle.
Même démonstration pour le point D et son image D'.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Seule **CHEDLIA** ne s'est pas trompée.

POUR ARNAUD
Cet élève a rangé les nombres dans l'ordre décroissant au lieu de l'ordre croissant. On peut penser qu'il confond la signification des symboles " < " et ">".

POUR KARINE
Cette élève a rangé correctement les nombres dont l'écriture est à virgule, puis a placé le nombre 2 à la fin.
Interprétations possibles de son erreur :
- elle pense qu'un nombre entier est plus grand qu'un nombre à virgule ;

ou bien
- elle range les nombres en fonction du nombre de chiffres de la partie décimale (d'abord 2 chiffres, puis 1 chiffre puis aucun chiffre).

POUR SANDRINE
L'erreur de cette élève se situe pour le rangement des nombres 22,2 et 22,02. On peut penser qu'elle estime qu'à partie entière égale, le nombre le plus grand est celui qui a le plus de chiffres dans sa partie décimale.

POUR MEHDI
Cet élève semble ranger la suite des nombres décimaux qui lui sont proposés sans tenir compte de la virgule.

SECOND VOLET (8 POINTS)

1)
Pour le document A :
Cette activité ne peut être présentée qu'après avoir déjà introduit la technique opératoire de la multiplication d'un nombre à deux ou trois chiffres par un nombre à deux chiffres et qu'après l'avoir fait fonctionner avec les élèves. Cette activité n'arrive qu'en fin d'une progression concernant la technique opératoire de la multiplication de deux entiers au cycle 3.

Pour le document B :
Cette activité arrive après avoir travaillé sur la technique opératoire de la multiplication d'un entier de deux ou trois chiffres par un entier d'un seul chiffre et après avoir travaillé sur la multiplication d'un entier par 10.
Par ailleurs, elle arrive avant l'apprentissage de la technique opératoire de la multiplication de deux entiers quelconques.

2)
Le maître utilisant le document A peut avoir pour objectifs :

- Faire comparer différentes techniques de la multiplication pour mieux faire comprendre celle apprise.
- Consolider la maîtrise de la technique enseignée.

Le maître utilisant le document B peut avoir pour objectifs :

- Présenter différentes techniques de la multiplication par un nombre à deux chiffres et les faire fonctionner.
- Travailler sur la notion d'ordre de grandeur d'un résultat.
- Proposer une situation de quadrillage pour appliquer une technique proposée.

Remarque concernant le document B :
Un maître pourrait proposer l'activité des quadrillages en situation introductive pour construire le sens de la technique opératoire de la multiplication plutôt que de la proposer comme un exercice d'application.

3)
Dans les deux documents, les propriétés de la multiplication utilisées sont :

- La distributivité de la multiplication sur l'addition
- La commutativité de la multiplication

4)
Les **avantages** présentés par le **document A** sont :

- Une présentation d'une variété de procédures qui permet aux élèves de prendre du recul par rapport à celle qu'ils connaissent
- Une question n°2 très ouverte qui peut amener une mise en commun assez riche.

Les **inconvénients** présentés par le **document A** sont :

- Les élèves ne font pas fonctionner les différentes procédures proposées. On peut penser alors qu'ils auront des difficultés pour se les approprier et donc pour les comparer.
- Il ne leur est pas proposé un travail sur l'ordre de grandeur du produit de deux nombres.

Les **avantages** présentés par le **document B** sont :

- Une bonne explicitation des procédures proposées avec un souci d'aides méthodologiques
- Une insistance sur la recherche de l'ordre de grandeur du produit de deux nombres.
- Les élèves doivent faire fonctionner les procédures proposées.

Les **inconvénients** présentés par le **document B** sont :

- Les élèves sont essentiellement en situation de reproduction ; peu d'initiative leur est laissée.
- L'exemple donné en introduction évoque un contexte parasite puisque ensuite on ne travaille que sur la technique opératoire de la multiplication.
- Les opérations ne mettant pas en jeu les mêmes nombres, les produits partiels sont différents, et ne favorisent pas le lien entre le tableau des premiers exercices et le schéma fléché de l'exercice 5.
- L'ordre des exercices pourrait être changé (voir la remarque dans le corrigé de la question 2).

5)
L'objectif du maître utilisant le document A se dégage bien : il s'agit de réviser une technique déjà apprise en faisant le lien avec d'autres techniques voisines.

L'objectif du maître utilisant le document B est la "découverte" de la technique de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Le fait de placer les élèves en situation d'application dès le début n'est pas la meilleure façon de construire le sens de cette technique. Donc ce document semble moins bien adapté à l'objectif visé.

DIJON

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

Soit *d* le chiffre des dizaines et *u* celui des unités. Si le nombre a quatre chiffres, pour qu'il soit un palindrome il faut que le chiffre des centaines soit *d* et celui des unités de mille soit *u*.

Il est donc de la forme P = $\overline{uddu}$ avec $0 \leq u \leq 9$ et $0 \leq d \leq 9$.
P est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est.

Donc si $u + d + d + u = 9k$ avec $k \in \mathbb{N}$;
$2(u + d) = 9k$ avec $k \in \mathbb{N}$;

On obtient la condition suivante : $u + d = 9\dfrac{k}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

• Comme $0 \leq u \leq 9$ et $0 \leq d \leq 9$, on a :

$0 \leq u + d \leq 18$ donc $0 \leq 9\dfrac{k}{2} \leq 18$ d'où $0 \leq k \leq 4$.

• Comme u et d sont des entiers , u + d est aussi un entier donc $9\dfrac{k}{2}$ doit être un entier. k est donc nécessairement pair. Les valeurs possibles pour k sont donc 0 ; 2 ou 4 .

Etudions chaque cas :

• Si k = 0 on a u + d = 0 donc u = 0 et d = 0. Impossible car P doit être non nul.

• Si k = 2 on a u + d = 9 donc soit :

u = 0 et d = 9 impossible car le nombre n'aurait que deux chiffres
u = 9 et d = 0 (P = 9009)
u = 1 et d = 8 (P = 1881) ou u = 8 et d = 1 (P= 8118)
u = 2 et d = 7 (P = 2772) ou u = 7 et d = 2 (P = 7227)
u = 3 et d = 6 (P = 3663) ou u = 6 et d = 3 (P = 6336)
u = 4 et d = 5 (P = 4554) ou u = 5 et d = 4 (P = 5445)

- Si k = 4 on a u + d = 18 donc u = 9 et d = 9 (P = 9999)

D'où les dix solutions possibles :

9009 ; 8118 ; 7227 ; 6336 ; 5445 ; 4554 ; 3663 ; 2772 ; 1881 ; 9999

EXERCICE 2

1. Soit x le nombre de kilomètres parcourus pour la semaine de location.

Formule 1 :
Quel que soit le nombre de kilomètres parcourus, le client paye 5 500 F par semaine donc :

$$\boxed{f(x) = 5\ 500}$$

Formule 2 :

- Si le client parcourt 2 000 kilomètres ou moins, il paye 4 550 F donc :

$$\boxed{\text{si } x \leq 2\ 000 \qquad g(x) = 4\ 550}$$

- S'il parcourt plus de 2 000 kilomètres, il paye 4 550 F auxquels il faut ajouter 1,60 F par kilomètre à partir du 2001$^{\text{ième}}$. Donc il doit payer :

$$4\ 550 + 1{,}60(x - 2\ 000)$$

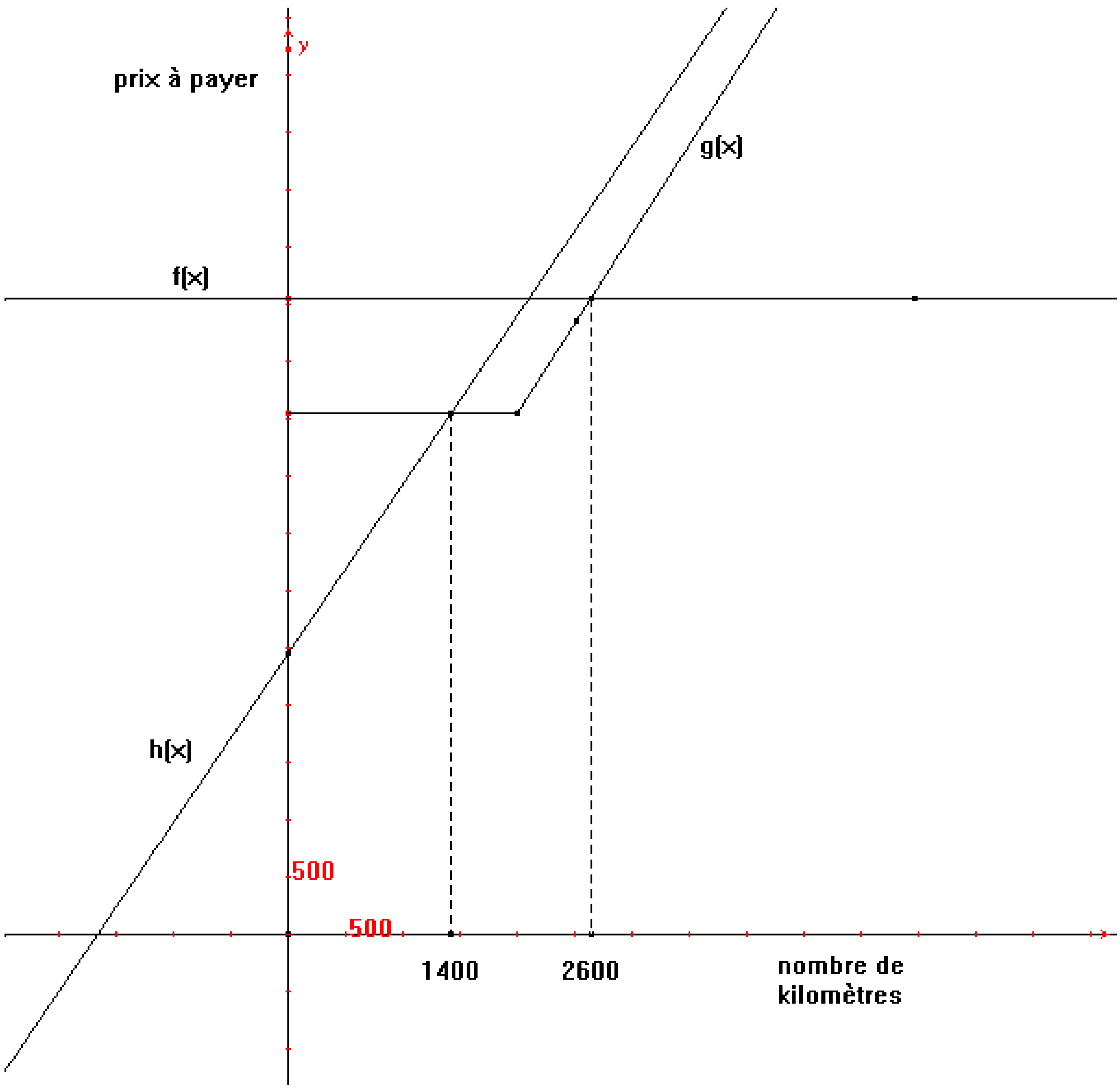
$$\boxed{\text{si } x \geq 2000 \qquad g(x) = 1350 + 1{,}6\,x}$$

Formule 3 :
Le client paye 350 F par jour pendant sept jours et 1,50 F par kilomètre,
donc il doit payer :

$$7 \text{ x } 350 + 1{,}5\,x$$

$$\boxed{h(x) = 2\ 450 + 1{,}5x}$$

2. Représentation graphique des trois formules



3.
a) **Résolution graphique**:

On repère la formule la plus avantageuse sur la représentation graphique, quand sa courbe est située en dessous des deux autres. Ainsi on voit que:

Si $x \leq 1400$ la formule 3 est plus avantageuse
Si $1\,400 < x \leq 2\,600$ la formule 2 est plus avantageuse
Si $x > 2\,600$ la formule 1 est plus avantageuse

b) Par le calcul la formule la plus avantageuse est déterminée par l'étude des trois inéquations suivantes :

$f(x) \geq g(x)$
$g(x) \geq h(x)$
$f(x) \geq h(x)$

Comparaison de f et g :

- si $x \leq 2\,000$ $f(x) - g(x) = 950$ donc $f(x) \geq g(x)$
- si $x \geq 2000$ $f(x) - g(x) = 4150 - 1{,}6\,x$

donc $f(x) - g(x) \geq 0$ si $2000 \leq x \leq 2593{,}75$
et $f(x) - g(x) \leq 0$ si $x \geq 2593{,}75$

Résumé de la comparaison de f et g :

Si $x \leq 2\,593{,}75$	**alors**	**$g(x) \leq f(x)$**
Si $x \geq 2\,593{,}75$	**alors**	**$f(x) \leq g(x)$**

Comparaison de f et h

$f(x) - h(x) = 3050 - 1{,}5\,x$

donc $f(x) - h(x) \geq 0$ si $x \leq 2\,033{,}33......$
et $f(x) - h(x) \leq 0$ si $x \geq 2\,033{,}33$

Résumé de la comparaison de f et h :

Si $x \leq 2\,033{,}33...$	**alors**	**$h(x) \leq f(x)$**
Si $x \geq 2\,033{,}33$	**alors..**	**$f(x) \leq h(x)$**

Comparaison de g et h

- si $x \leq 2\,000$ $\quad g(x) - h(x) = 2100 - 1{,}5\,x$
  donc $\quad g(x) - h(x) \geq 0 \quad$ si $x \leq 1400$
  et $\quad g(x) - h(x) \leq 0 \quad$ si $1400 \leq x \leq 2000$

- si $x \geq 2\,000$ $\quad g(x) - h(x) = 0{,}1\,x - 1100$
  donc $\quad g(x) - h(x) \leq 0 \quad$ si $2\,000 \leq x \leq 11\,000$
  et $\quad g(x) - h(x) \geq 0 \quad$ si $x \geq 11\,000$

Résumé de la comparaison de g et h

si $x \leq 1400$	**alors**	**$h(x) \leq g(x)$**
si $1400 \leq x \leq 11\,000$	**alors**	**$g(x) \leq h(x)$**
si $x \geq 11\,000$	**alors**	**$h(x) \leq g(x$**

D'où le résultat final :

- Si $x \leq 1400$ alors $h(x) \leq g(x) \leq f(x)$ donc la formule 3 est plus avantageuse
- Si $1\,400 < x \leq 2\,033,\,33$ alors $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ donc la formule 2 est plus avantageuse
- Si $2\,033{,}33 < x \leq 2\,593{,}75$ alors $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ donc la formule 2 est plus avantageuse
- $2\,593{,}75 < x \leq 11\,000$ alors $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ donc la formule 1 est plus avantageuse
- Si $x > 11\,000$ alors $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ donc la formule 1 est plus avantageuse

4-
Les formules proposées sont valables pour une semaine. Aucune information n'est donnée sur des tarifs pour deux semaines consécutives. Donc la correction envisage plusieurs solutions même si ces solutions sembles invraisemblables dans la réalité. Il est improbable que le loueur de voiture vérifie le nombre de kilomètres parcourus au bout d'une semaine.

Pour 4500 kilomètres parcourus sur deux semaines, les formules 1 et 3 donnent les prix à payer suivants :

Formule 1 : 2 x 5500 = **11 000 F**
Formule 3 : 350 x 14 + 1,5 x 4 500 = **11 650 F**

Pour la formule 2 voici plusieurs raisonnements:

- Soit on considère que pour deux semaines le client bénéficie d'un crédit de 4 000 kilomètres pour la somme de 2 x 4550 F et que les 500 kilomètres supplémentaires sont payés à 1,60F le kilomètre. On obtient ainsi la somme totale à payer :
2 x 4550 + 500 x 1,6 = **9 900 F**

- Soit on considère qu'il parcourt plus que 2000 kilomètres sur chacune des deux semaines. Si on appelle x le nombre de kilomètres parcourus la première semaine, on obtient alors :
$1350 + 1{,}6\,x + 1350 + 1{,}6\,(4500 - x)$

soit $2700 + 1{,}6\text{x } 4500 =$ **9 900 F**

- Soit on considère qu'il a parcouru 2000 kilomètres la première semaine et 2500 kilomètres la deuxième semaine et dans ce cas on obtient :
$4550 + 1350 + 1{,}6\text{x}2500 =$ **9 900 F**

Donc trois raisonnement qui aboutissent à la conclusion où la formule 2 est plus avantageuse pour deux semaines.

Faisons l'étude du cas où le trajet d'une des deux semaines est inférieur à 2000 kilomètres et celui de l'autre semaine est alors nécessairement supérieur à 2000 kilomètres.
Cherchons le cas limite le plus défavorable qui correspond à 0 kilomètre dans une semaine et 4500 kilomètres dans l'autre semaine. Ce prix est le maximum possible en formule 2.
Le prix à payer est ainsi majoré par
$4550 + 1350 + 1{,}6 \text{ x } 4500 = 5900 + 7200 = 13\,100$ F
On ne peut donc pas être certain que la formule 2 soit la plus avantageuse.
Cherchons la condition sur la répartition de la distance parcourue selon les semaines pour que la formule 2 soit la plus avantageuse.
Si la distance parcourue en une semaine est moins de 2000 km et dans l'autre semaine est $x >$ 2000, le prix à payer est $4550 + 1350 + 1{,}6\,x$
Ce prix sera inférieur à 11 000 (prix le plus avantageux entre formule 1 et 3) si
$4550 + 1350 + 1{,}6\,x < 11000$
soit si $x < 3187{,}5$
soit un trajet de plus de 1312,5 km en première semaine et de moins de 3187,5 km en deuxième semaine.

Remarque : la réponse est faite en fonction de l'hypothèse qu'il garde la même formule pour les deux semaines.

EXERCICE 3

1°)
(AH) est une hauteur issue A , elle est donc perpendiculaire au côté [BC] .
Avec le théorème de Pythagore utilisé dans le triangle AHB rectangle en H, on a :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

Or AH = 2BC par hypothèse et on sait que CB = 2HB car le triangle ACB est isocèle. D'où AH = 4 HB. On en déduit que :

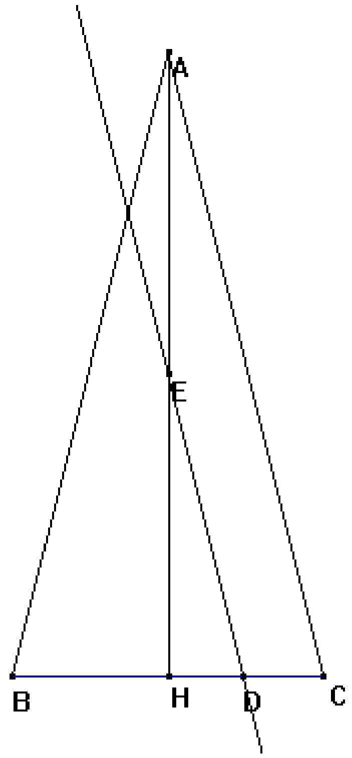
$$8{,}5^2 = \frac{1}{4}BC^2 + 4\,BC^2 = \frac{17}{4}BC^2$$

d'où $BC^2 = \dfrac{4\text{x}(8{,}5)^2}{17} = 17$

soit $BC = \sqrt{17}$

Donc BC = $\sqrt{17}$ cm.

2°) Construction



3°)

a) On a $\frac{HD}{HC} = \frac{2}{\sqrt{17}}$ et $\frac{HE}{HA} = \frac{4}{2\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}}$.

Avec le réciproque du théorème de Thalès utilisé dans le triangle CHA (les points H, D, C d'une part et H, E, A d'autre part étant disposés respectivement dans cet ordre), on peut affirmer que les droites (DE) et (CA) sont parallèles.

b) 1ère méthode :
Le théorème de Pythagore utilisé dans le triangle rectangle EHD permet d'écrire :
ED = $\sqrt{EH^2 + HD^2} = \sqrt{17}$ (en cm)

2ème méthode :

Dans le triangle AHC, E un point du segment [AH] et D un point du segment [HC], les droites (ED) et (AC) étant parallèles, on peut appliquer le théorème de Thalès :

$\frac{ED}{AC} = \frac{HD}{HC} = \frac{2}{\sqrt{17}}$ donc ED = $\frac{2}{\sqrt{17}} \times AC = \sqrt{17}$

Donc ED = $\sqrt{17}$ cm.

c)

Le théorème de Pythagore utilisé dans le triangle rectangle BHE permet d'écrire :

$EB^2 = HB^2 + HE^2 = (\frac{\sqrt{17}}{2})^2 + 16 = \frac{81}{4}$; donc EB = 4,5 (cm)

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1) PROCÉDURES DE RÉSOLUTION

Nous proposons trois procédures de la plus experte à la moins experte. Deux seulement sont demandées aux candidats.

Première procédure :
Masse des personnes dans l'ascenseur : 90 + 70 = 160 kg
L'ascenseur ne peut transporter que 200 kg .
Masse que l'on peut ajouter : 200 - 160 = 40 kg
Toutes les personnes restantes pèsent plus de 40 kg donc aucune d'elles ne peut monter en plus dans l'ascenseur.

Deuxième procédure :
Masse des personnes dans l'ascenseur : 90 + 70 = 160 kg
La personne restante la plus légère est Mathilde qui pèse 50 kg.
Si Mathilde monte en plus dans l'ascenseur on obtient :
160 + 50 = 210 kg.
Or l'ascenseur ne peut transporter que 200 kg donc Mathilde ne peut pas monter (210> 200) .
On en conclut que les autres personnes ne peuvent pas non plus monter dans l'ascenseur.

Troisième procédure :
Additionner successivement les masses respectives de :
Tchang, Paul et Farid 90 + 70 + 80 = 240 kg
Tchang, Paul et Mathilde 90 + 70 + 50 = 210 kg
Tchang, Paul et Dolorès 90 + 70 + 60 = 220 kg
On constate que dans chaque cas, la masse totale est supérieure à 200 kg. Donc personne ne peut monter en plus dans l'ascenseur.

2) CET EXERCICE PERMET D'ÉVALUER

- La capacité de l'élève à résoudre un problème en sélectionnant les données pertinentes.
- La capacité de l'élève à effectuer une addition avec retenue (éventuellement une soustraction) de deux ou trois nombres à trois chiffres, tous multiples de dix.
- La capacité de l'élève à comparer des mesures de masses exprimées sous la forme de nombres entiers à trois chiffres.

3) ANALYSE DES STRATÉGIES

Elève A : Il additionne les masses de Tchang et Paul.
Puis il additionne les masses de Farid, Tchang et Paul, en faisant une erreur d'opération.
Puis il additionne les masses de Farid, Tchang, Paul et Dolorès, cette fois sans erreur, ce qui prouve qu'il n'utilise pas les résultats des additions précédentes.
Il commence à additionner les masses de Farid, Tchang, Paul, Dolorès et Matilde sans finir l'addition. Peut-être s'est - il rendu compte qu'il était inutile de poursuivre le calcul.
Il semble que cet élève n'ait pas compris la question posée. Croit-il qu'on lui demande si chaque nouvelle personne peut monter dans l'ascenseur alors que les autres y sont déjà ?.
Sa réponse convient mais il s'agit sans doute d'une réponse à une autre question.

Elève B : Il additionne les masses des deux personnes déjà dans l'ascenseur, ce qui lui donne 160 kg.
Puis il ajoute à ce résultat la masse de la personne la plus légère (Mathilde) ce qui lui permet de conclure que personne ne peut monter en plus dans l'ascenseur. Sa réponse est correcte.

Elève C : Il additionne les masses de Farid, Mathilde et Dolorès (190 kg) . Il en conclut que ces trois personnes peuvent monter dans l'ascenseur.
Il semble que cet élève n'a pas pris en compte le fait que Tchang et Paul soient déjà dans l'ascenseur, exprimé par le mot "***encore***" de la question posée.

Elève D : Il additionne les masses de Paul, Tchang et de Mathilde qui est la plus légère. Il trouve 200 à son opération en faisant une erreur. Il en conclut que les autres personnes (plus lourdes que Mathilde) ne peuvent pas monter dans l'ascenseur. Sa réponse est cohérente avec son calcul.

Elève E : Il fait un dessin de l'ascenseur et donne trois réponses fausses sans les justifier.

Elève F : Cet élève utilise la procédure n°3 du corrigé. Sa réponse est juste.

SECOND VOLET (8 POINTS)

1)

a) Ces trois fiches ont pour objectif commun l'apprentissage de la technique opératoire de la multiplication des entiers.

b) Pour aborder cet objectif, les élèves doivent avoir les connaissances préalables suivantes :

- savoir faire la décomposition canonique d'un entier ;
- avoir mémorisé déjà quelques tables de multiplication ;
- savoir multiplier un nombre à deux chiffres multiple de 10 par un nombre à trois chiffres multiple de 100 ;
- savoir additionner pour ajouter les résultats partiels.

2)

Chacune des trois fiches a un contenu et une démarche différents.

En ce qui concerne **le contenu**, les trois fiches présentent des champs numériques différents :

- *Maths en fête* traite la multiplication d'un nombre de deux ou trois chiffres par un nombre à deux chiffres.
- *Maths collection quadrillage* traite la multiplication d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre.
- *Math Elem* traite de la multiplication d'un nombre de deux ou trois chiffres par un nombre à un chiffre.

En ce qui concerne **la démarche** :

- On retrouve dans les fiches *Maths en fête* et *Maths collection quadrillage* une démarche similaire :
  - Le dénombrement des carreaux d'un quadrillage évolue vers un tableau puis vers une opération posée en colonnes.

- Mais la fiche *Maths collection quadrillage* diffère de celle de *Maths en fête* car elle introduit avant l'usage du quadrillage, le dénombrement de cassettes disposées en lignes et colonnes.

- Pour sa part, la fiche *Math Elem* présente un algorithme en trois étapes comme une recette sans justification. Par ailleurs l'exercice 3 met en jeu l'utilisation de la distributivité de la multiplication sur l'addition qui n'apparaît pas dans le début de la fiche.

3)

a) Différences dans l'utilisation des quadrillages des deux premières fiches :

Dans la première fiche, le quadrillage est introduit *a priori.*
En revanche, dans la seconde fiche, le quadrillage peut apparaître comme une schématisation des piles de cassettes, à condition de faire pivoter cette représentation pour retrouver l'orientation du quadrillage (commutativité de la multiplication).

Dans la première fiche, les nombres sont décomposés en dizaines et en unités, alors que dans la seconde, ils sont décomposés en unités d'abord et dizaines ensuite.

b) Dans chacune de ces fiches, on fait appel à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

4)

a) L'intérêt de cette situation peut être de deux ordres :

- Poser un problème aux élèves pour lequel ils ne savent pas calculer le résultat de l'opération ;
- Introduire des objets disposés en lignes et en colonnes de façon à pouvoir passer au quadrillage qui amène la technique opératoire.

b) Tout dénombrement d'objets disposés en lignes et en colonnes pourra convenir comme situation initiale :

- Des voitures rangées dans un parking ;
- Des cases pour ranger des objets divers (bouteilles, boites à œufs,…) ;
- Des rangées d'arbres ou de légumes ;

à condition que la taille des nombres soit suffisamment grande pour que le calcul pose un vrai problème.

5)

Par le quadrillage, l'introduction de la technique opératoire de la multiplication se réalise dans le cadre géométrique qui se prolongera plus tard par le calcul des aires.
Pour changer l'approche de cette technique, il faudrait proposer un problème dans un cadre arithmétique.
Exemple :

" J'achète 30 stylos à 3F l'un et 8 crayons à 3F l'un. Quel est le prix total?"

Les deux solutions possibles à ce problème permettent d'écrire que :

$(30 + 8) \times 3 = 30 \times 3 + 8 \times 3$.

Une autre approche, elle aussi arithmétique, pourrait être proposée sans contexte.
Exemple :
On demande aux élèves de faire une addition réitérée très longue, avec compétition sur la rapidité de l'obtention du résultat.

" Faire 23 + 23 +……… +23 (14 fois)".

La stratégie gagnante est $23 \times 10 + 23 \times 4$.

Remarque : ici il est demandé une autre approche de LA technique, ce qui suppose qu'il s'agit de la technique usuelle. Proposer la technique "per gélosia", n'est pas changer d'approche mais changer de technique.

6)

Les étapes suivantes possibles pour chaque fiche :

Fiche 1 : cela pourrait être le regroupement de certains produits partiels afin d'arriver à une présentation plus courte de la multiplication.

Fiche 2 : l'étape suivante pourrait consister en la recherche du produit de deux nombres à plusieurs chiffres.

Fiche 3 : l'étape suivante pourrait être de s'appuyer sur l'exercice n° 3 de la fiche afin d'introduire la distributivité de la multiplication sur l'addition, et ainsi donner du sens à l'algorithme présenté au début.

GRENOBLE, LYON

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1 (3 points)

Nous pouvons représenter les données dans le tableau suivant , et l'utiliser pour répondre aux questions :

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Lion	F	F	F	V	V	V	V
Licorne	V	V	V	F	F	F	V

F : ce jour-là, l'animal ne dit que des phrases fausses.
V : ce jour-là, l'animal ne dit que des phrases vraies.

1) Pour que la phrase « hier je mentais » soit vraie, il faut que :
soit l'animal dise la vérité ce jour-là et alors la veille il mentait : le jeudi pour le lion et le dimanche pour la licorne (un V précédé d'un F);
soit il mente ce jour-là et alors la veille il disait la vérité : le lundi pour le lion et le jeudi pour la licorne.(un F précédé d'un V).
<u>C'est donc un jeudi qu'Alice a surpris la conversation entre le lion et la licorne</u>

2) D'après ce qui précède, pour que le lion dise « je mentais hier », il faut que le jour de la semaine soit jeudi ou lundi. Peut-il dire aussi « je mentirai dans 3 jours » ?
Essayons le jeudi, jour où il ne ment pas : « dans 3 jours » sera dimanche, jour où il ne ment pas ; donc il ne peut pas avoir dit ces deux phrases un jeudi.
Essayons le lundi, jour où il ment : « dans 3 jours » sera jeudi, jour où il ne ment pas ; ce qui convient puisqu'il ment.
<u>Cette deuxième rencontre a donc eu lieu un lundi.</u>

3) Si cette phrase était vraie, ce jour-là le lion dirait la vérité, et il mentirait la veille et le lendemain ; nous trouverions donc, pour le lion, la succession « F-V-F » ; nous voyons sur le tableau que ce n'est pas possible.
Cette phrase est donc fausse ; essayons donc les 3 jours où le lion dit des phrases fausses, en sachant que, pour que l'ensemble de la phrase soit fausse, il suffit qu'une partie de la phrase soit fausse

Le lundi : la veille il ne mentait pas, donc la première partie de la phrase est fausse, donc la phrase est fausse : il a bien pu la dire un lundi.

Le mardi : il mentait la veille et il mentira le lendemain, donc cette phrase est vraie ; d'après les données, il n'a pas pu dire cette phrase un mardi.

Le mercredi : le lendemain, il ne mentira pas, donc la phrase est fausse et il a bien pu la dire un mercredi.

<u>La phrase a pu sortir de la gueule du lion soit un lundi, soit un mercredi.</u>

<u>Remarque</u> : la réponse attendue repose sur la propriété logique : « pour qu'une phrase soit fausse, il suffit qu'une seule de ses composantes soit fausse » ; cette propriété s'inscrit dans le cadre d'une logique binaire : si une phrase n'est pas vraie alors elle est fausse . Et tout le monde admettra qu'une phrase est vraie si et seulement si toutes ses composantes sont vraies. (Il s'agit de la définition du connecteur « et »).

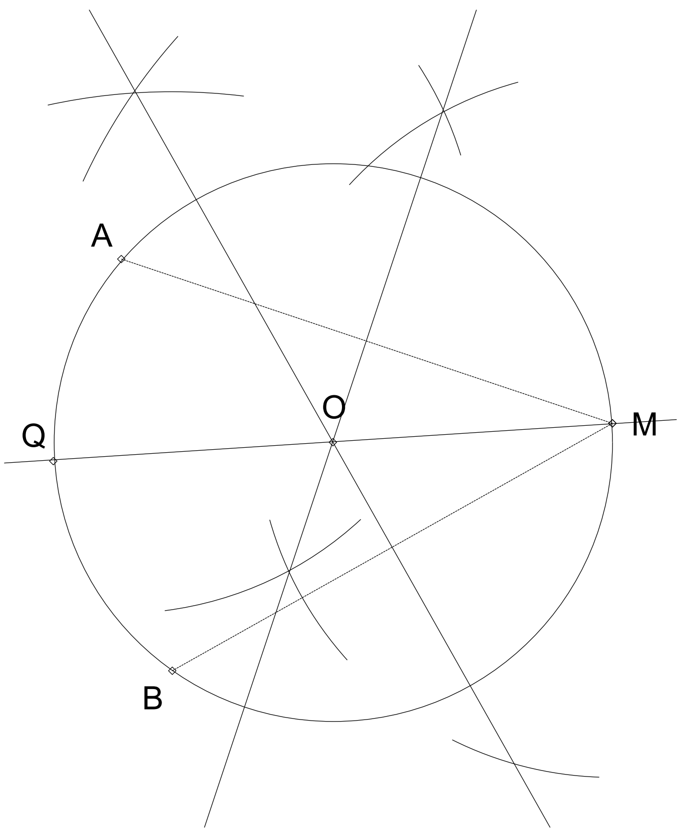
EXERCICE 2 (5 points)

QUESTION 1

D'après l'énoncé le jardinier peut tracer une droite passant par deux points, et un cercle de centre et de rayon donnés : il peut donc tracer la médiatrice d'un segment, comme droite joignant les deux points d'intersection de deux cercles de même rayon et de centres respectifs les extrémités du segment.

1-a) Le centre O du cercle C est équidistant de tout point de C. Il appartient donc à la médiatrice de tout segment dont les extrémités sont deux points distincts de C. L'intersection des médiatrices de deux tels segments donne donc le centre O (si ces deux médiatrices ont une intersection, c'est à dire si elles ne sont pas parallèles).
Il suffit donc de choisir deux points distincts A et B sur le cercle C et de construire la médiatrice des deux segments [AM] et [BM] (pour plus de précision dans la construction, il vaut mieux choisir A et B "assez éloignés" de M, mais distincts).
Le point Q est obtenu comme intersection de la droite (MO) et du cercle C.(figure 1)

figure 1



<u>Autre construction possible</u> :

- On peut placer un point A sur C et construire la médiatrice du segment [AM], puis considérer que cette médiatrice définit un diamètre [IJ] de C. et enfin construire la médiatrice du segment [IJ] : l'intersection des deux médiatrices donne le centre O.

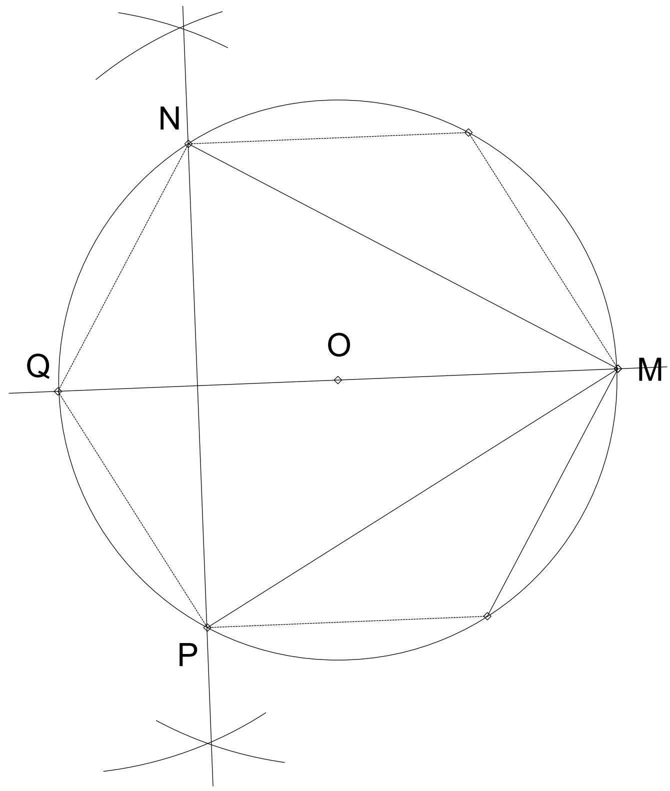
1-b) Plusieurs constructions sont possibles ici, et les justifications ne sont pas demandées, ni même les descriptions ; nous les donnons ici pour information.

Seule une figure correspondant à une des 3 constructions suivantes était exigée :

b1) On obtient P et N comme intersections du cercle C avec le cercle de centre Q et de rayon r :
en effet les triangles ONQ et OPQ sont équilatéraux de côté r ; leurs angles sont donc égaux à 60°, et en particulier les angles $\widehat{NOQ}$ et $\widehat{QOP}$; donc leur somme $\widehat{NOP}$ vaut 120° et $\widehat{NOM}$ = 180° - $\widehat{NOQ}$ = 120° ; de même : $\widehat{POM}$ = 180° - $\widehat{QOP}$ = 120°. Les cordes [MN], [NP] et [PM], sous-tendues par des angles au centre égaux, ont la même longueur d'où MN = NP = PM, et le triangle est donc équilatéral.

b2) On trace la médiatrice du segment [QO] qui coupe C aux points cherchés N et P : cf. justification en 2) a).

figure 2



b3) On reporte deux fois à partir de M le rayon OM, sur C ; les points obtenus sont N dans un sens, et P dans l'autre sens.

Justification : on obtient un triangle équilatéral en joignant un sommet sur deux dans un hexagone régulier (qui s'inscrit donc dans un cercle) : en effet l'angle au centre d'un hexagone régulier est 60°, l'angle au centre du triangle ainsi obtenu est alors 60° + 60°, soit 120°, ce triangle est bien le seul triangle régulier (appelé triangle équilatéral).
Pour construire un hexagone régulier inscrit dans le cercle C, on utilise le fait qu'un hexagone régulier est composé de 6 triangles équilatéraux de sommet commun O, centre du cercle, donc

que le côté de l'hexagone régulier a pour longueur le rayon du cercle. D'où la construction par report du rayon.
(Il vaut mieux d'ailleurs, pour être plus précis, tracer le cercle de centre Q passant par O qui coupe C en N et P. : construction b1)

QUESTION 2

2-a) Par construction, O est le centre du cercle circonscrit au triangle MNP. Or ce triangle est équilatéral donc, dans ce triangle, les médiatrices sont aussi médianes ;

donc, O, point d'intersection des médiatrices est aussi celui des médianes : donc O est le centre de gravité du triangle MNP.
La propriété du centre de gravité dans un triangle nous donne :

OR = **Erreur !**MR et OM = **Erreur !**MR soit OM = 2 OR

or OM = ON = OR = OQ : rayon de C

On en déduit : 2OR = ON et 2OR = OQ, d'où R, qui est sur [QO], est le milieu de [QO] et OR = RQ

D'où **Erreur !**

(et la construction b-2 peut ainsi être justifiée : (PN) est perpendiculaire à [QO], puisque (MQ) est médiatrice de [PN], d'autre part nous venons de voir que R est le milieu de [QO] ; donc (PN) est bien la médiatrice de [QO]).

Remarque : D'autres démonstrations sont possibles, par exemple en montrant que le quadrilatère ONQP est un losange

2-b) r est le rayon de C.

Le triangle QMN est inscrit dans un demi-cercle de centre O et de rayon r : C'est donc un triangle rectangle en N, et son hypothénuse est le diamètre [QM]
On peut donc utiliser le théorème de Pythagore :

$QM^2 = QN^2 + NM^2$ donc $(2r)^2 = r^2 + NM^2$ soit $NM^2 = 3r^2$

et $MN = r\sqrt{3}$.

Autre solution :

On peut par exemple montrer que le triangle MNR est rectangle en R, car (MO) est médiatrice du segment [NP]. On peut alors utiliser le théorème de Pythagore :

$MN^2 = MR^2 + NR^2$

R étant le milieu de [NP], NR vaut la moitié de NP, donc de MN : NR = **Erreur !**
Il reste à calculer MR : MR = MO + OR = MO + **Erreur !** donc MR = r + **Erreur !** = **Erreur !**
On obtient : MN^2 = (**Erreur !**)^2 + (**Erreur !**)^2 soit MN^2 - **Erreur !** = **Erreur !**

Erreur ! = **Erreur !** $MN^2 = 3r^2$ et MN = r**Erreur !**

QUESTION 3

On rappelle qu'on peut calculer l'aire d'un secteur de disque de rayon a et d'angle d° en utilisant la propriété suivante : dans un disque donné , il y a proportionnalité entre l'angle et l'aire d'un secteur :

	Disque	Secteur
Angle	360°	d°
Aire	πa^2	**A**

D'où **Erreur !**

Nous allons calculer l'aire L de la lunule par somme (ou différence) des aires suivantes, que nous savons calculer :

- S_M : l'aire du secteur de disque, de centre M, de rayon MN, compris entre les rayons [MN] et [MP]
- S_O : l'aire du secteur de disque de centre O, de rayon r, compris entre les rayons [ON] et [OP]
- S : l'aire de la figure formée par les deux triangles ONM et OPM

Nous constatons sur la figure que : $S_M + L = S_O + S$

d'où

$L = S_O + S - S_M$ (1)

Calcul de S :

D'après les propriétés du triangle équilatéral, S est égale aux 2/3 de l'aire du triangle MPN (les 3 triangles ONM, OPM et ONP sont isométriques). D'où :

$$S = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times PN\times MR = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times(r\sqrt{3})\times(\frac{3}{2}r) = \frac{\sqrt{3}}{2}\times r^2$$

Calcul de S_M, aire du secteur de disque de rayon MN et d'angle 60°, et de S_O, aire du secteur de disque de rayon r et d'angle 120°

$$S_M = \frac{60}{360}\times(\pi\times MN^2) = \frac{1}{6}\times\pi\times 3r^2 = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$S_O = \frac{120}{360}\times(\pi r^2) = \frac{\pi r^2}{3}$$

d'où L, à partir de la relation (1)

$$L = S_O + S - S_M = \frac{\pi r^2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times r^2 - \frac{\pi r^2}{3} = r^2(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2}) = r^2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6})$$

ou encore :

$$L = \frac{r^2}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

AUTRES SOLUTIONS :

Appelons S l'aire cherchée de la lunule hachurée et calculons-la par différence d'aires de surfaces connues :

i) Soit A_1 l'aire du secteur (NMP) du disque de centre M et de rayon MN, qui est constitué par la réunion de la surface du triangle équilatéral MNP et de la surface blanche (délimitée par le cercle de centre M et de rayon MN et la corde [NP] de ce cercle). L'angle ,NMP vaut 60°
donc A_1 = **Erreur !**$\times \pi \times MN^2$ = **Erreur !**$\times \pi \times$(r**Erreur !**)^2

A_1 = **Erreur !**

On peut donc écrire aussi : <u>A_1 = A(MNP) + B</u> en appelant B l'aire de la surface blanche et A(MNP) l'aire du triangle MNP.

ii) L'aire A_2 du secteur (NOP) du disque de centre O et de rayon r, qui est constitué par la réunion de la lunule, de la même surface blanche précédente et de la surface du triangle NOP, est égale à (sachant que l'angle ,NOP vaut 120°) :

A_2 = **Erreur !**$\times \pi r^2$

On peut écrire aussi : A_2 = S + B + A(NOP)

iii) Par différence $A_2 - A_1$ on élimine B qu'on ne sait pas calculer, et on obtient:

$A_2 - A_1$ = S + A(NOP) – A(MNP)

Donc S = ($A_2 - A_1$) + A(MNP) – A(NOP)

Or $A_2 - A_1$ = **Erreur !**$\times \pi r^2$ - **Erreur !** = πr^2 (**Erreur !** - **Erreur !**)

$A_2 - A_1$ = - **Erreur !**

Et pour calculer simplement A(MNP) – A(NOP), il suffit de remarquer que la surface du triangle ONP représente le tiers de la surface du triangle équilatéral MNP, et donc que cette différence d'aires est égale aux deux tiers de l'aire du triangle MNP :

A(MNP) – A(NOP) = **Erreur !**$\times$ A(MNP) = **Erreur !**$\times$ **Erreur !**$\times$ NP $\times$ MR

= **Erreur !**$\times$ r**Erreur !** $\times$ **Erreur !**

= r^2 **Erreur !**

Et enfin on obtient : **S** = r^2 **Erreur !** - **Erreur !** ou encore **Erreur !**

AUTRE SOLUTION PLUS SIMPLE :

On remarque que le disque de centre O et de rayon r est formé par la surface du triangle équilatéral MNP et par 3 autres surfaces isométriques, chacune délimitée par un côté du triangle et par l'arc du disque sous-tendu par ce côté. Et l'une de ces 3 surfaces est formée par la lunule et la surface blanche de la solution précédente (d'aire appelée B). On a donc:

S + B = **Erreur !** [A(disque) – A(MNP)]

On sait calculer A(MNP) : cf solution précédente, et on calcule B par différence entre A_1 , l'aire du secteur (NMP) et l'aire A(MNP) du triangle MNP.

Donc : S = **Erreur !**$\times \pi r^2$ - **Erreur !**$\times$ A(MNP) – [A_1 – A(MNP)]

S = **Erreur !**$\times \pi r^2$ + **Erreur !** $\times$ A(MNP) – A_1

D'où le résultat.

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

QUESTION 1

Il s'agit d'une situation de proportionnalité ; nous noterons f la fonction linéaire qui à x la longueur, en mètres, de papier utilisé, fait correspondre f(x) le nombre de livres emballés ; et nous noterons g sa fonction réciproque.
On peut représenter la situation dans le tableau suivant :

Nombre de livres emballés	10	25	?	50	?
Longueur de papier utilisé (en mètres)	4	10	14	?	6

f ↑ g ↓

Laurène :
Tous ses résultats sont justes.
* Pour le 1°), elle décompose 14 m en 10 m + 4 m, et elle ajoute les nombres de livres correspondants.
Elle utilise donc la propriété additive de linéarité : f(10 + 4) = f(10) + f(4)
* Pour le 2°) elle utilise encore cette propriété, en décomposant 50 (livres) en :
10 + 10 + 10 + 10 + 10 et en faisant la somme des longueurs de papier correspondantes.
* Pour le 3°), elle a encore utilisé assez explicitement la propriété additive : décomposition de 6 m en 2 m + 4 m et calcul f(2) + f(4) ; mais pour calculer f(2), elle a essayé d'utiliser encore cette propriété additive en décomposant 2 en 4 - 2 ce qui l'obligeait quand même à calculer f(2) d'une autre façon, qu'elle n'a pas explicitée. On peut supposer qu'elle a vu que 2 était la moitié de 4, et qu'elle a trouvé 5 comme la moitié de 10, donc qu'elle a utilisé implicitement la propriété multiplicative de linéarité : f(***Erreur !***x) = ***Erreur !***f(x)

Farida :
Tous ses résultats sont faux.
Pour le 1°), elle semble appliquer la règle (fausse bien sûr) : « avec 4 m de papier de plus, on emballe 4 livres de plus » ; de même, pour le 3°) : « avec 4 m de moins, 4 livres de moins » soit la propriété f(10 + 4) = f(10) + 4 et f(10 - 4) = f(10) - 4
Sa réponse au 2°) est plus difficile à interpréter : obtenant 50 en ajoutant 21 à 29, on pouvait s'attendre, si elle appliquait toujours la même règle, à ce qu'elle ajoute 21 à 14 pour obtenir le nombre correspondant à 50 ; peut-être a-t-elle cherché à obtenir un résultat plus plausible ? ou peut-être a-t-elle simplement « perdu le fil » ? (comme elle a failli le faire au 3°) où elle avait commencé à écrire 21 au lieu de 25)

Yann :
* Résultats justes au 1°) et 3°) , avec les mêmes procédures que Laurène, quoique moins explicitées.
* Résultat faux au 2°). Il a tenté d'utiliser, comme au 1°), la propriété additive de linéarité, mais il a mélangé les données "nombre de livres" et "longueur de papier" : il a compris qu'il fallait décomposer 50 (livres) mais au lieu d'utiliser 10 (livres) il a utilisé 4 (m) en additionnant 12 fois le nombre 4 puis le nombre 2 ; il a ensuite ajouté les nombres correspondants (10 pour 4 ; et 5 pour 2) et a bien obtenu 125 (il répond en fait à la question

"combien de livres peut-on emballer avec 50 m de papier"?).

Maria :

Réponse juste seulement au 2°).

Pour le 1°) : sa procédure est exacte, elle a effectué les calculs qui lui auraient permis de donner la bonne réponse (propriété additive de linéarité, comme Laurène et Yann) mais elle s'est trompée en écrivant la réponse : elle a réécrit la donnée du problème.

Pour le 2°) : elle a représenté les 50 livres comme 5 paquets de 10 livres, s'est probablement dit que pour chacun de ces paquets il fallait 4 m de papier, et a calculé 4×5. On peut dire qu'elle a mis en œuvre, très implicitement, la propriété multiplicative de linéarité :

$$g(5 \times 10) = 5 \times g(10)$$

Pour le 3°), elle a utilisé sans doute la règle fausse suivante :« si l'on ajoute 2 à un nombre, il faut ajouter 2 au nombre correspondant » ; ou encore :

$f(4 + 2) = f(4) + 2$

Mais elle a aussi mélangé les nombres de livres et les nombres de mètres de papier et perdu le sens de la question : à la question « combien de livres… ? » elle répond qu'il faut 12 m de papier.

Anthony :

Réponses fausses au 1°) et au 3°) . Pas de réponse au 2°).

Comme Farida, il a utilisé la propriété, fausse ici, $f(25 + 4) = f(25) + 4$ et

$f(4 + 2) = f(4) + 2$

Et à ces deux questions « combien de livres… ? » il a donné ses réponses en « m de papier »

Benjamin :

Tous ses résultats sont justes.

Pour le 1°), il utilise la propriété additive de linéarité.

Pour le 2°), il utilise $g(2 \times 10) = g(10) + g(10)$ où l'on peut voir plutôt la propriété additive de linéarité avec un début d'écriture multiplicative.

Pour le 3°) , il a calculé le rapport entre le nombre de livres et la longueur de papier correspondante, et il a multiplié ce rapport par la longueur 6 (m) pour obtenir le nombre de livres correspondant. Il a probablement calculé le coefficient de proportionnalité, c'est à dire « le nombre par lequel il faut multiplier les nombres de la deuxième ligne pour obtenir ceux de la première ». On pourrait aussi dire que c'est la procédure de passage par l'image de l'unité, mais celle-ci n'a pas beaucoup de sens ici (le nombre de livres que l'on peut couvrir avec 1m de papier est 2,5 !)

Cette analyse peut être résumée selon le tableau suivant :

	1°)		2°)		3°)		Nb de réponses justes
Laurène	J	Propriété add.	J	Propriété.add.	J	Propriétés.add et .multiplicative.	3
Farida	F	Erreur E+	F	Erreur E+ Autre ?	F	Erreur E+	0
Yann	J	Propriété add.	F	Propriété .add. Confusion entre les grandeurs dans la procédure	J	Propriétés .add. et multiplicative	2
Maria	F	Propriété add. Erreur dans l'énoncé de la	J	Dessin Propriété .mult	F	Erreur E+ ; confusion entre les grandeurs dans	1

		réponse				l'énoncé de la réponse.	
Anthony	F	Erreur E+	0		F	Erreur E+ ; confusion entre les grandeurs dans l'énoncé de la réponse.	0
Benjamin	J	Propriété add.	J	Propriétés .add. et multiplicative.	J	Coefficient de proportionnalité.	3

E+ : l'erreur qui consiste à ajouter, ou retrancher, le même nombre à chacune des valeurs correspondantes des deux grandeurs
Propriété : il s'agit des propriétés, additives ou multiplicatives, de linéarité.

Commentaires (non demandés dans le sujet) :
Les élèves qui donnent les bonnes réponses utilisent les propriétés de linéarité (surtout additive) quand il y a des relations arithmétiques simples entre les nombres ($14 = 10 + 4$ et $50 = 5 \times 10$, perçu surtout additivement). Le coefficient de proportionnalité n'est utilisé que par un élève sur 6, dans un seul cas : quand les relations entre les nombres sont moins évidentes. Nous avons déjà noté que ce coefficient n'a pas vraiment de sens dans la situation ; peut-être cette procédure aurait-elle été plus utilisée si l'on avait demandé une longueur de papier pour un nombre donné de livres : les élèves auraient pu alors calculer la longueur de papier nécessaire pour emballer un livre (40cm) ; dans ce cas, le coefficient de proportionnalité aurait eu du sens dans la situation.

QUESTION 2

Trois types d'erreurs :

- <u>Premier type d'erreur</u> : erreur dans le choix de la procédure de résolution qui témoigne d'une mauvaise compréhension des situations de proportionnalité.

Nous avons relevé plusieurs fois l'erreur E+ qui consiste à appliquer la propriété :
$f(x + a) = f(x) + a$ que l'on peut énoncer comme « il faut ajouter le même nombre aux nombres correspondants » ce qui revient à dire « la fonction conserve les écarts » ;
Cette propriété est fausse pour la fonction linéaire, elle caractérise les fonctions additives : $f(x) = x + b$, b étant une constante. On peut donc parler de « prégnance du modèle additif » : les élèves qui commettent cette erreur, appliquent à une situation de proportionnalité, c'est à dire multiplicative, une propriété des situations additives.
On peut distinguer ici deux enfants qui semblent faire cette erreur d'une façon systématique : Farida et Anthony, et une enfant, Maria, qui fait un raisonnement correct quand il y a des relations simples permettant d'utiliser les propriétés de linéarité, mais qui revient au modèle additif quand il n'y a pas de relation évidente.

- <u>Deuxième type d'erreur</u> : erreur dans l'exécution d'une procédure correcte (Yann pour le 2°)). Nous avons vu qu'il n'a pas su, dans ses calculs, gérer les deux catégories de nombres (nombre de livres et nombre de mètres de papier). La complexité de la tâche peut expliquer cette confusion.

- <u>Troisième type d'erreur</u> : erreur dans l'énoncé de la réponse.

C'est le cas de Maria et d'Anthony : pour le 3°), ils se trompent dans l'unité ; et pour le 1°), Maria se trompe de nombre. On peut faire l'hypothèse que la complexité des calculs effectués leur a fait perdre de vue le problème , et oublier la question posée.

On pouvait aussi envisager les erreurs d'écriture et de syntaxe, en particulier un usage incorrect du signe = (ou du mot « égale ») :
Yann : au 2°) $4 + 4 + \ldots + 4 + 2 = 125$ et au 3°) "10 = 4m"
Benjamin : au 1°) "4m=10 livres" et au 2°) "10m égale 25 livres".

SECOND VOLET (8 POINTS)

QUESTION 1 : DIFFICULTÉS

Les résultats aux exercices 38 et 15 de l'évaluation montrent les difficultés des élèves pour concevoir les notions d'aire et de périmètre, dificultés plus importantes dans le concept de périmètre que dans le concept d'aire :

• pour l'exercice 38, seulement 38,7% de bonnes réponses pour l'évaluation du périmètre, et 56,2% pour l'évaluation de l'aire (auxquelles il faudrait ajouter sans doute les élèves qui se sont trompés seulement dans le décompte, ou parce qu'ils avaient mal compris la question : aire de la surface non coloriée)

• dans l'exercice 15, on note également plus de bonnes réponses pour l'aire que pour le périmètre (55,2% contre 48%) – mais il est vrai que nous n'avons pas tous les résultats permettant de conclure.

Beaucoup d'élèves ont du mal à concevoir la notion de périmètre, qu'ils assimilent à la notion d'aire :

Pour l'exercice 38-a, c'est le cas pour 11,2% des élèves, et cette confusion est encore présente dans les réponses « 24 à 27 », données par 25,2% des élèves ; en effet, on peut penser qu'ils comptent les carrés à l'intérieur de la figure (ou même à l'extérieur), le long du contour : ils conçoivent sans doute ces carrés, ainsi que la figure, comme un objet concret, et ils ont du mal à envisager la longueur de cette ligne abstraite qui est le contour de la figure.

• <u>L'aire et le périmètre sont conçus comme des grandeurs liées</u> : quand il s'agit de comparer deux figures, beaucoup d'élèves pensent que si l'aire est plus grande (ou égale), le périmètre l'est aussi – et réciproquement. On peut penser que c'est le cas pour la plupart des 33% d'élèves ayant donné les réponses 2 et 3 à l'exercice 15.
• Le code 7 de l'item 75 (exercice 38, annexe C2) montre sans doute <u>une difficulté liée à la conception de l'unité d'aire cm^2 :</u>

Selon la réponse (9 ou 31/35) on peut penser que les petits carrés partiellement coloriés (ou partiellement blancs) "comptent" entièrement (ou au contraire pas du tout) dans l'évaluation de l'aire de la surface coloriée (ou de la surface blanche, par mauvaise interprétation). L'élève peut chercher le nombre de carrés nécessaires pour recouvrir la surface considérée : comme l'exercice peut le suggérer, le cm^2 ne peut être qu'un petit carré.

QUESTION 2 : OBJECTIF DE L'EXERCICE 3

Dans l'exercice 3 du manuel "*Atout Math CM1*", la comparaison attendue des résultats concerne les 3 figures communes aux deux exercices 1 et 2.
Pour la figure 1-a, les résultats sont identiques : les 4 parcelles ont à la fois la même aire et le même périmètre.
Pour les figures 2-b et 3-c, les résultats sont différents : les parcelles ont la même aire, mais des périmètres différents.
La conclusion que l'on attend est donc « deux figures qui ont la même aire peuvent avoir des périmètres différents, ou bien le même périmètre ».
Le but de l'exercice 3 est donc probablement de faire prendre conscience que l'aire et le périmètre sont deux grandeurs indépendantes (cf. la troisième difficulté précédente).

QUESTION 3 : PERTINENCE DES EXERCICES 1 ET 2 PAR RAPPORT À L'EXERCICE 3

Plusieurs paramètres des exercices 1 et 2 nous paraissent peu pertinents pour traiter l'exercice 3.

- L<u>e fait qu'il y ait 9 figures dans l'exercice 1, 6 figures dans l'exercice 2, et seulement 3 figures communes</u> ne permet pas de porter l'attention des élèves sur le problème essentiel, qui est de comparer les résultats pour les figures communes ; une consigne aussi vague et la présence des figures non identiques ne peut que perturber la comparaison demandée dans cet exercice 3.

Et d'autre part, un plus grand nombre de figures communes rendrait la conclusion plus convaincante.

- <u>Le fait que dans les 3 figures, les parcelles aient la même aire,</u> et la nature des questions des exercices 1 et 2 ne sont pas non plus très pertinents : il s'agit seulement de repérer si les aires, ou les périmètres, sont identiques ou non. Une comparaison plus fine aurait pu être demandée et conduire à une plus grande variété de cas (9 différents : aire plus grande, périmètre plus grand, ou plus petit, ou égal, etc…) ce qui mettrait mieux en évidence le fait que les deux grandeurs aire et périmètre sont indépendantes. Là aussi, un plus grand nombre de figures communes serait donc souhaitable.
- <u>Le support des figures fournies n'est pas non plus le plus pertinent</u> : leur taille rend difficile les mesures effectives des longueurs, le support sur fichier ne permet pas bien des procédures de découpage et recollage pour comparer directement les aires.

Et le papier blanc est aussi mal choisi : un support quadrillé aurait permis de comparer facilement les périmètres et les aires dans une plus grande variété de cas. On peut regretter en effet qu'ici les seules parcelles de même périmètre sont celles qui sont superposables ; cela ne va pas aider les élèves à construire le concept de périmètre.

QUESTION 4 : TROIS PROCÉDURES DE COMPARAISON

La consigne donnée ici peut conduire les élèves à comparer les figures suivant des points de vue différents, et dans chaque cas, nous pouvons envisager diverses procédures .
Remarque : Il suffisait d'en donner 3 différentes, en envisageant au moins deux points de vue.

- Comparaison suivant les aires (« petit, grand » lié à « espace occupé »)

a) De manière perceptive : pour A et B, c'est possible, pour A et C, c'est plus difficile.
b) Découpage-recollage-superposition : découpage de C en deux rectangles 10×4 que l'on pose sur A ; superposition de A dans B.
c) Découpage et superposition ne sont plus réalisés effectivement, mais à l'aide d'un dessin : trait pour partager C, dessin des deux rectangles 10×4 à l'intérieur de A, dessin d'un rectangle identique à A à l'intérieur de B.
d) Pavage à l'aide d'une surface gabarit : cette procédure ne s'impose pas ici, mais on pourrait l'envisager pour A et C ; on partage C en 5 carrés 4×4, et on dessine ces 5 carrés sur A. (Ou utilisation d'un support quadrillé en carrés de 1 cm^2).
e) La comparaison par calcul à partir de la mesure des longueurs n'est pas envisageable ici : les figures choisies, très faciles à comparer directement, la consigne « floue », laissent penser qu'il s'agit de la première approche de la notion d'aire en CM1.

- Comparaison suivant la plus grande dimension (ou la diagonale) (idée de plus grande « longueur » possible)

a) De manière perceptive : facile ici pour la plus grande dimension.
b) Découpage des figures et comparaison directe des longueurs par superposition.
c) Report au compas, ou à l'aide d'un gabarit.
d) Mesurage à la règle graduée.

- Comparaison selon les périmètres : seulement dans le cas où cette notion a été introduite avant

a) Mise bout à bout sur une ligne droite des segments par report, et comparaison directe.
b) Mesurage et calcul.

QUESTION 5 : COMPARAISON DES DEUX APPROCHES

Il faut noter d'abord que cette comparaison est difficile car :

- dans un cas, nous ne disposons que du manuel élève et dans l'autre, du livre du maître
- nous ne savons pas si ces documents correspondent à peu près au même moment dans la progression, ou à des moments différents, ni à quels moments ils correspondent.

Pour pouvoir effectuer cette comparaison, nous supposerons que la fiche d' *« Atout Math »* est distribué aux élèves sans activité préalable, qu'ils l'effectuent individuellement, et que la correction s'effectue au tableau avec une présence importante du maître.

a) variété des procédures

Remarque préalable : nous venons de voir que la consigne donnée dans "*ERMEL"* permet d'envisager 3 problèmes différents, dont deux sont posés aussi dans "*Atout Math*" : la comparaison des aires, et celle des périmètres de plusieurs figures. Nous pouvons donc comparer ici les procédures de résolution de chacun de ces deux problèmes.

Plusieurs paramètres peuvent être envisagés :

- travail de groupe dans "*ERMEL*", travail individuel dans "*Atout Math*"

On peut supposer que le travail individuel permet a priori d'obtenir globalement dans la classe une plus grande variété de procédures, certaines procédures individuelles un peu « marginales » étant rejetées à l'intérieur de chaque groupe.

- nombre de figures à comparer :

Trois seulement dans "*ERMEL*" ;
Et dans "*Atout Math*" , pour le périmètre, 9 fois de 2 à 4 figures (les parcelles) à comparer ; et pour l'aire, 6 fois de 2 à 4 figures !

Si ces deux fiches se font dans la même séance, ou même sur deux séances, on peut penser que toutes les procédures utilisées par les élèves ne pourront pas être envisagées lors de la mise en commun (et même qu'il y a des chances que, pour chaque cas, seule soit énoncée celle prévue par le maître).
Au contraire dans "*ERMEL*", le temps sera suffisant pour faire formuler toutes les procédures même si les trois problèmes sont envisagés.

Mais, d'autre part, "*Atout Math*" a l'avantage de proposer à la classe plusieurs cas de figures vraiment différents à analyser, ce qui peut permettre l'apparition de procédures différentes, chacune s'adaptant au mieux aux propriétés de la figure envisagée.

En conclusion : le fait d'avoir de nombreux cas à examiner nous parait plutôt favoriser la variété des procédures, même si le temps manque pour les examiner toutes.

- le support : fichier de "*Atout Math*" ou grandes figures sur papier pour

ERMEL. Le fichier rend impossible le découpage-recollage, ce qui prive les élèves des procédures de base qui donnent du sens au concept d'aire.

b) possibilité de validation

Dans ERMEL, l'organisation prévue favorise beaucoup plus que dans Atout Math une validation par confrontation avec les réponses et les procédures des autres : travail par groupe de deux plutôt qu'individuel, et discussion lors d'une mise en commun, comme le laisse supposer la présence des feuilles A3 ; alors que nous avons vu que le grand nombre de cas à examiner dans les fiches de Atout Math ne laissera sans doute pas le temps pour un véritable débat collectif.

On peut envisager également une validation par des contrôles expérimentaux : essayer des superpositions de pièces découpées par exemple, ou un comptage de carreaux avec utilisation de support quadrillé, ou bien utiliser, du moins pour les périmètres, l'instrument règle graduée pour faire des mesures.

On voit alors que l'utilisation du fichier de "*Atout Math*" ne permet guère un contrôle expérimental : découpage – recollage impossible, figures trop petites, utilisation de matériel et/ou d'instruments non suggérée ; au contraire la demande de commentaires pousse à fournir des justifications reposant plutôt sur des connaissances (par exemple pour le partage b de l’annexe E2, les deux parcelles rectangulaires non superposables ont même aire, car chacune est la moitié de rectangles superposables).

Au contraire, “*ERMEL”* propose clairement un matériel manipulable et dont les dimensions, suffisamment grandes, ont été réfléchies pour favoriser les découpages – recollages ; et l’utilisation de matériel de géométrie est explicitement demandé.

GUADELOUPE-Guyane

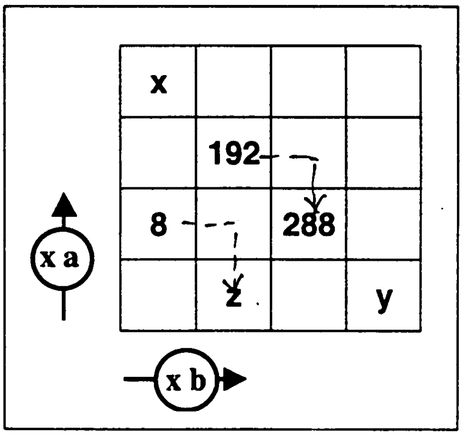
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1 (4 points)
Nous proposons plusieurs solutions expertes et plusieurs solutions à la portée d'élèves de cycle 3. Il n'était demandé qu'une méthode pour chaque catégorie

- **MÉTHODES ALGÉBRIQUES:**

1)
Première méthode : (recherche des opérateurs)



Soient a et b les nombres rationnels positifs associés aux opérateurs multiplicatifs.

- Pour aller de la case contenant le nombre 8 à celle contenant le nombre 192, on fait agir une fois l'opérateur "multiplier par a" et une fois l'opérateur "multiplier par b", d'où :

  $$8 \text{ x } a \text{ x } b = 192$$

  soit $\boxed{a \text{ x } b = 24}$ (1)

- Pour aller de la case contenant le nombre 192 à celle contenant le nombre 288, on fait agir une fois l'opérateur "multiplier par b" et une fois l'opérateur inverse de l'opérateur "multiplier par a" soit "multiplier par **Erreur !**", d'où :

  $$192 \times b \times \frac{1}{a} = 288$$

  soit $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

  ou $\boxed{2 \text{ x } b = 3 \text{ x } a}$ (2)

Le problème revient à résoudre, dans l'ensemble des rationnels, le système défini par :

$$\left| \begin{array}{ll} a \times b = 24 & (1) \\ 2 \times b = 3 \times a & (2) \end{array} \right.$$

En multipliant les deux membres de l'équation (2) par a, on obtient :

$2 \times a \times b = 3 \times a^2$

soit avec (1) $2 \times 24 = 3 \times a^2$

d'où $a^2 = 16$ et $\boxed{\mathbf{a = 4}}$

En reportant cette valeur de a dans l'équation (1), on obtient :

$\boxed{\mathbf{b = 6}}$

2)
Autre méthode

En partant d'un raisonnement appliqué à la troisième ligne seule, c'est-à-dire considérant seulement les nombres 8 et 288. Cela donne $8 \times b^2 = 288$, soit $\boxed{b = 6}$.

Le passage de 8 à 192 donne $8 \times 6 \times \frac{1}{a} = 192$, d'où a = 4

Il suffit maintenant de combiner ces opérateurs pour obtenir les valeurs de x, y et z :

$z = 8 \times b \times \frac{1}{a} = 8 \times 6 \times \frac{1}{4}$ soit $\boxed{\mathbf{z = 12}}$

$y = 288 \times b \times \frac{1}{a} = 288 \times 6 \times \frac{1}{4}$ soit $\boxed{\mathbf{y = 432}}$ ou $y = z\,b^2 = 12 \times 6^2$
$= 432$

$x = 192 \times a \times \frac{1}{b} = 192 \times 4 \times \frac{1}{6}$ soit $\boxed{\mathbf{x = 128}}$ ou $x = 8\,a^2 = 8 \times 4^2 = 128$

3)
Méthode sans rechercher les opérateurs a et b :

$192 \times k = 288$ et $8 \times k = z$ d'où k =1,5 et <u>z = 12</u>
$x \times k = 192$ et x = 192 : 1,5 soit <u>x = 128</u>
$8 \times h = 288$ et $z \times h = y$ d'où h = 36 et $y = 12 \times 36$ <u>y = 432</u>

Les méthodes sont nombreuses. Les dernières citées permettent des résolutions, à l'aide de calculatrices, par des élèves de cycle 3.

• MÉTHODES ARITHMÉTIQUES (QUI PEUVENT ÊTRE MISES EN OEUVRE PAR UN ÉLÈVE DU CYCLE 3 DISPOSANT D'UNE CALCULETTE) :

1)
Recherche des opérateurs :

recherche de <u>l'opérateur horizontal :</u>

Pour passer de la case 8 à la case 288, il faut appliquer 2 fois l'opérateur b. L'élève pourra le rechercher en procédant par tâtonnement de la manière suivante :

8 x 2 x 2 = 32,
8 x 3 x 3 = 72,

8 x 4 x 4 = 128,
etc. jusqu'à 8 x 6 x 6 = 288. C'est donc 6

A partir de là, on peut déterminer le contenu de la case immédiatement située sous la case 192 (entre 8 et 288) en multipliant 8 par 6 : c'est 48.
L'opérateur vertical se déduit alors facilement par division :
a= 192 : 48 c'est 4.
Il s'ensuit : z = 48 : 4 **z = 12.** x = 8 x 4 x 4 **x = 128**
y = 12 x 6 x 6 **y = 432**
L'usage de la calculette rend les calculs plus rapides.

2)
Sans recherche des opérateurs a et b
Pour passer de la case marquée 8 à la case marquée z, on effectue les mêmes opérations que pour passer de la case marquée 192 à la case marquée 288.
Or 192 x 1,5 =288 (1,5 est obtenu à l'aide de la calculatrice : division de 288 par 192)
d'où z = 8 x 1,5
soit **z = 12**
Pour passer de la case marquée 288 à la case marquée y , on effectue les mêmes opérations que pour passer de la case marquée 192 à la case marquée 288.
On sait que 192 x 1,5 = 288 d'où 288 x 1,5 = y soit **y = 432**

Pour passer de la case marquée x à la case marquée 192 , on effectue les mêmes opérations que pour passer de la case marquée 192 à la case marquée 288
d'où $x \times 1{,}5 = 192$, d'où $x = \frac{192}{1{,}5}$, soit **x = 128**
Il est possible[6] de retrouver les opérateurs :
Pour passer de la case marquée z = 12 à la case marquée y = 432, on répète 2 fois la même opération ; comme 432 = 12 x 36, et que 36 = 6 x 6, on multiplie deux fois de suite par le nombre 6.
L'opérateur "horizontal" est **"multiplier par 6"**.
Pour passer de la case marquée 8 à la case marquée x = 128, on répète deux fois la même opération comme 128 = 8 x 16 et que 16 = 4 x 4, on multiplie deux fois de suite par le nombre 4.
L'opérateur "vertical" est **"multiplier par 4"**.

EXERCICE 2 (4 points) (voir figure page 230).

QUESTION 1
Le triangle MOA est équilatéral :
Par construction des cercles C_1 et C_2, MA = MO = OA = a.
Le triangle MOA a ses côtés de même longueur : il est donc équilatéral.

[6] La question semble ne porter que sur la recherche de certaines cases du quadrillage repérées par ?.

QUESTION 2
Le triangle MAT est rectangle en A :
Par construction du cercle C_3 , le triangle MAT est inscrit dans le cercle de diamètre [MT] : il est donc rectangle en A.

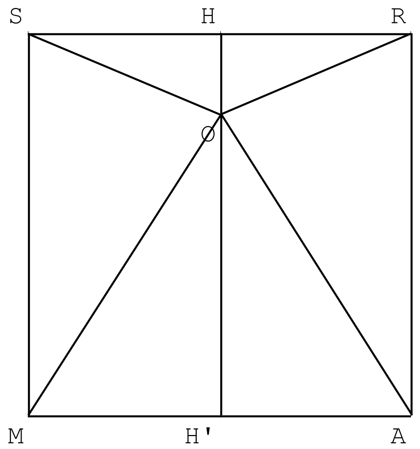
QUESTION 3
3.1
Le quadrilatère MARS est un carré :
- Par construction de C_1 : MA = MS
de C_2 : MA = RA
de C_4 : RA = RS.

Le quadrilatère MARS a ses quatre côtés de même longueur a : c'est un losange.
- On a démontré à la question précédente que l'angle $\widehat{MAT}$ est un angle droit, autrement dit que le losange MARS a un angle droit : ce losange est donc un carré.

3.2
Le triangle SOR est isocèle de sommet O :
- MOA est équilatéral (démontré à la question 1) donc OM = OA, et par conséquent le point O est un point de la médiatrice de [MA].
- Le quadrilatère MARS est un carré (démontré à la question 3.1) : la médiatrice d'un des côtés est également la médiatrice du côté opposé à ce côté (un axe de symétrie du carré). Le point O qui appartient à la médiatrice de [MA] appartient aussi à la médiatrice de [SR] et, par conséquent, est équidistant des extrémités de ce segment, autrement dit : OS = OR.
- Le triangle SOR a ses côtés [OS] et [OR] isométriques : il est isocèle de sommet O.

Calcul de SO en fonction de a :
• Première méthode :
- Soit H le pied de la hauteur relative à [SR] dans le triangle SOR.
Comme le triangle SOR est isocèle de sommet O, la hauteur [OH] relative à [SR] est aussi la médiane relative à [SR] et par conséquent H est le milieu de [SR].
Autrement dit :

$$SH = \frac{a}{2} \qquad (1)$$



- Soit H' le point d'intersection de la droite (OH) avec le segment [MA].
(OH) étant la médiatrice commune aux côtés [SR] et [MA] du carré, et le triangle MOA étant équilatéral, (OH') est aussi la hauteur relative à [MA] dans ce triangle de côté a, d'où :

$$OH' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

- Les points H, O et H' étant alignés :

HO= HH' - OH'

Comme les droites (SR) et (MA) sont les supports des côtés opposés du carré MARS, leur distance est égale au côté de ce carré,

d'où HO = $a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (3)

- Le triangle SHO étant, par construction , rectangle en H, il vérifie le théorème de Pythagore :

$S0^2 = SH^2 + H0^2$

$$S0^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2(2 - \sqrt{3})$$

d'où $\boxed{\textbf{SO} = a\sqrt{\mathbf{2 - \sqrt{3}}}}$ (4)

• **Seconde méthode :**

MOS est isocèle de côté a et d'angle au sommet $\widehat{SMO} = 30°$

car $\widehat{SMO} + \widehat{OMA} = \widehat{SMA}$ avec $\widehat{SMA} = 90°$ (MARS est un carré) et $\widehat{OMA} = 60°$ (MOA est un triangle équilatéral)

et ainsi sin15° = **Erreur !** SO x **Erreur !** soit **Erreur !**

3.3

Le triangle OAI est rectangle isocèle de sommet A :

- Par construction du cercle C_2 : AO = AI = a.

Le <u>triangle OAI</u> a ses côtés [AO] et [AI] de même longueur : il est <u>isocèle de sommet A</u>.

Le triangle MOA étant équilatéral, ses angles sont égaux à 60° et, en particulier :

$\widehat{OAM} = 60°$ (5)

L'angle $\widehat{RAM}$ est un des angles du carré MARS et par conséquent :

$\widehat{RAM} = 90°$

Comme $\widehat{RAM} = \widehat{RAO} + \widehat{OAM}$, on en déduit :

$\widehat{RAO} = 90° - 60°$ $\boxed{\widehat{RAO} = 30°}$ (7)

Par construction de C_2 et de C_4, RI = IA = AR = a. Le triangle RAI a ses côtés de même longueur : il est donc équilatéral et, par conséquent, ses angles sont égaux à 60°, et en particulier :

$\boxed{\widehat{RAI} = 60°}$ (8)

Il résulte de (7) et (8) que $\widehat{OAI} = \widehat{OAR} + \widehat{RAI} = 30° + 60° = 90°$

Le <u>triangle OAI</u>, isocèle de sommet A, a un angle droit : il est <u>rectangle isocèle en A.</u>

Calcul de OI en fonction de a :

Le triangle OAI est rectangle isocèle de sommet A et les longueurs des côtés de l'angle droit [AO] et [AI] sont égales à a, et par conséquent l'hypoténuse [OI] est telle que :

$\boxed{\mathbf{OI = a\sqrt{2}}}$ $(OI^2 = OA^2 + AI^2,\ OI^2 = 2\ OA^2)$ (9)

3.4

Démontrer que les points S, O et I sont alignés :

Nous chercherons à démontrer que l'angle $\widehat{SOI}$ est plat.

$\widehat{SOI} = \widehat{SOM} + \widehat{MOA} + \widehat{AOI}$

Le triangle AIO étant rectangle isocèle de sommet A, ses angles à la base sont égaux à 45° et en particulier :

$\widehat{IOA} = 45°$ (10)

Le triangle MOA étant équilatéral, ses angles sont égaux à 60° et en particulier :

$\widehat{AOM} = 60°$ (11)

Par construction, le triangle SMO est tel que SM = MO et par conséquent, il est isocèle de sommet M. Il en résulte que ses angles à la base sont égaux :

$\widehat{SOM} = \widehat{OSM} = (180° - \widehat{SMO}) / 2$ (12)

Or $\widehat{SMO} = \widehat{SMA} - \widehat{AMO}$ (13)

L'angle $\widehat{SMA}$ est un des angles du carré MARS ($\widehat{SMO} = 90°$) et l'angle AMO est un des angles du triangle équilatéral MOA ($\widehat{AMO} = 60°$) et par conséquent :

$\widehat{SMO} = 30°$

En reportant cette valeur dans l'égalité (12), on obtient :

$\widehat{SOM} = 75°$ (14)

On est maintenant capable d'évaluer l'angle $\widehat{SOI}$ *:*

$\widehat{SOI} = \widehat{SOM} + \widehat{MOA} + \widehat{AOI}$.

D'après les relations (10), (11) et (14), on obtient :

$\widehat{SOI} = 75° + 60° + 45° = 180°$

Ce qui montre que <u>les points S, O et I sont alignés</u>.

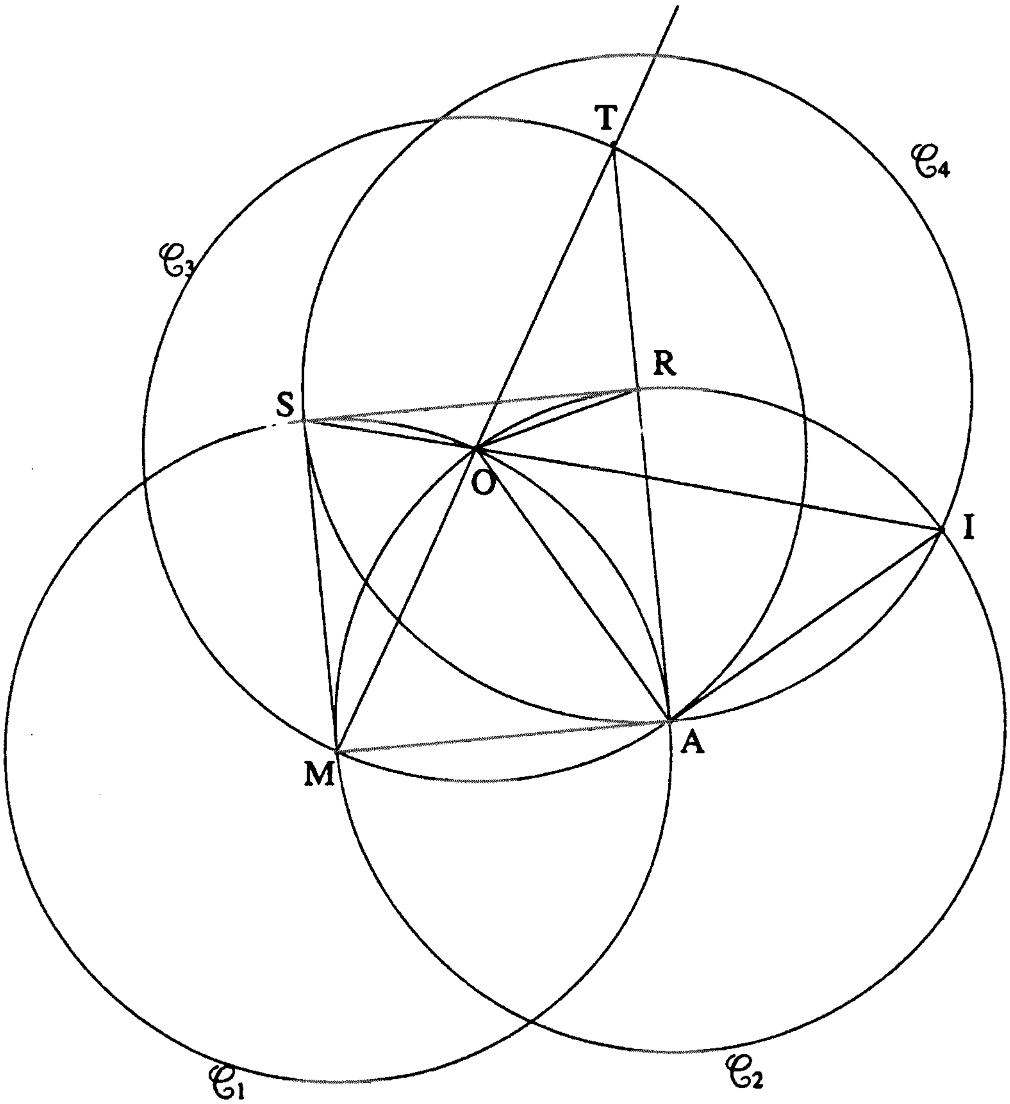
Calcul de SI en fonction de a :

Comme les points S, O et I sont alignés, on a :

SI = SO + OI

soit, d'après les relations (4) et (9) :

$SI = a\sqrt{2-\sqrt{3}} + a\sqrt{2}$ ou $SI = a(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2})$


T
$\mathscr{C}_4$
$\mathscr{C}_3$
R
S
O
I
A
M
$\mathscr{C}_1$
$\mathscr{C}_2$

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

Question 1
Savoir **résoudre deux problèmes soustractifs différents** par **une procédure au choix** de l'élève.
Cette compétence peut être précisée de la façon suivante :
- **comprendre et représenter** deux types[7] différents de problèmes "additifs" :
• problème 1 de type *composition de deux états*
• problème 2 de type *transformation d'états*
Voir, à ce sujet, page 267 le sujet de l'académie de Nancy-Metz Reims.Strasbourg.
- **modéliser** chacun de ces deux problèmes **par une écriture[8] mathématique**.
- **résoudre ces problèmes sans** nécessairement recourir à l'une des **techniques opératoires** de la soustraction.

Question 2
Les résultats corrects aux deux problèmes sont respectivement 9 nageurs et 12 gâteaux.

PRODUCTION DE JULIE :

Elle résoud correctement les deux problèmes.

Premier problème :
Son dessin des nageurs montre **qu'elle a anticipé le résultat « 9 nageurs »** dès le dessin (dessin des 9 premiers nageurs puis changement de ligne).
• Elle réalise un "schéma" (diagramme[9] ensembliste dit de VENN) pour répondre à la consigne du maître - expliquer par un schéma -
• L'égalité encadrée est une réponse correcte à la consigne -« donner le calcul fait »-et traduit mathématiquement le problème.
• La phrase de conclusion est bien rédigée et correspond à la consigne -« donner le résultat »-.

Second problème :
Sa représentation reflète une bonne maîtrise de la numération décimale :
• elle représente les 5 dizaines de gâteaux sous la forme de 5 rectangles puis cherche à enlever 3 dizaines et 8 unités (pour les 38 gâteaux mangés). Elle barre donc 3 rectangles et dessine les dix[10] unités dans l'un des rectangles pour pouvoir en enlever 8, qu'elle barre.
Il est possible qu'elle lise sa représentation pour obtenir 12 (1 rectangle et 2 ronds non barrés) : le résultat correct qui était recherché.

• Elle traduit le problème par la bonne égalité soustractive.

[7] utilisation de la typologie de G. VERGNAUD sur les structures additives.
[8] la production d'une écriture mathématique ne traduira pas automatiquement un calcul effectué car la représentation permet des procédures de comptage et la résolution peut donc être antérieure à l'écriture produite.
[9] ce diagramme a du lui être enseigné car elle respecte très exactement sa présentation usuelle : un ensemble et ses deux sous-ensembles avec leurs cardinaux respectifs rattachés par des liens bien positionnés.
[10] on peut remarquer la décomposition du dix en deux paquets de cinq.

• La phase[11] de conclusion laisse apparaître une compréhension de la diminution du nombre de gâteaux.

PRODUCTION DE CAROLINE :

Les deux réponses recherchées sont exactes.
Caroline utilise pour chaque problème deux représentations :
l'une figurative[12] (tous les nageurs, tous les gâteaux), l'autre plus conventionnelle (en référence à « Picbille »)[13]: (utilisée dans la classe) un ensemble de boîtes de dix éléments (chacune des boîtes étant divisée en deux parties de cinq éléments).

Les réponses aux deux problèmes peuvent être obtenues **à partir des représentations** (ce qui peut expliquer la présence du 9 et du 12 près de chacune des représentations)
Hypothèse :
La réponse à chacun des deux problèmes **semble avoir été obtenue à l'aide de la représentation figurative** correspondante : il suffit de **compter un par un les objets non barrés** dans les représentations.
(Pour les nageurs, présence du 1 près du premier nageur non barré ; pour les gâteaux, le 12 est proche du douzième élément non barré)
L'autre représentation n'est pas utilisée pour produire les résultats mais pour répondre à une demande supposée du maître.

En effet :

le 9 désigne le 9ième élément pour la situation des nageurs
le 12 est proche des 38 éléments entourés pour la situation des gâteaux.

On peut remarquer que, contrairement au premier problème, la phrase de conclusion précède, pour le second problème, les écritures mathématiques.

Cela corrobore l'hypothèse selon **laquelle les écritures mathématiques ne traduisent pas un calcul[14] effectué.**
Les transformations d'écritures soustractives et les phrases de conclusion sont exactes.

PRODUCTION D'EDOUARD :

Il répond correctement aux deux problèmes posés effectuant les trois tâches demandées : schéma, "calcul" et phrase de conclusion.

<u>Premier problème :</u>
Edouard utilise un diagramme de Venn moins élaboré que celui de Julie. On peut remarquer que les 12 nageurs sont dessinés en deux parties.

---

[11] remarque : il faut lire cette phrase comme étant: : il n'y a plus que 12 gâteaux.
[12] elle reste proche du dessin : des bonhommes simplifiés pour les nageurs, des ronds pour les gâteaux, elle n'est pas structurée en dizaines et unités.
[13] Ce mode de représentation est introduit dans la collection "J'apprends les Maths", Retz-Nathan, 1991. Il s'accompagne d'un petit personnage nommé Picbille. Est-ce un effet du contrat didactique?
[14] On appelle Calcul une transformation directe d'écritures symboliques sans utilisation de procédures de comptage.

La **recherche de la solution** a donc précédé la schématisation et l'on peut émettre l'hypothèse selon laquelle **elle s'est faite "de tête".** Le schéma n'est alors présent que pour répondre à une partie de la consigne.

Second problème :

Les 50 éléments sont regroupés par dizaines. Rien ne désigne les 38 éléments.
Hypothèse 1 : Il est donc possible que ce schéma ne serve pas et que l'obtention de l'écriture 50 - 38 = 12 soit, cette fois encore, **le résultat d'une procédure[15] de calcul pensé sans support écrit.**
Hypothèse 2 : On remarque que les deux dernières dizaines sont structurées différemment. Elles ont peut-être permis, par **simple observation**, le **repérage** des 38 éléments (les 3 premiers rectangles et, une colonne de 5 et 3 éléments de la seconde colonne dans le quatrième rectangle) et donc des **12 restants** (2 éléments dans la seconde colonne et 1 rectangle).
Pour les deux problèmes, les égalités de nombres et les phrases de conclusion sont correctes.

PRODUCTION D'ARTHUR :

Il obtient le bon résultat au premier problème, mais au second celui-ci est faux

Premier problème :

Arthur utilise un schéma figuratif : il dessine les 12 nageurs, commence à les numéroter (cela lui a peut-être servi à barrer les 3 nageurs qui sont dans le petit bain).
Il **peut maintenant obtenir le résultat exact (9) en comptant** les nageurs non barrés.
Il écrit une égalité soustractive erronée car il inverse le 3 et le 12, mais il utilise le nombre 9.
Hypothèse sur l'origine de cette erreur : comme il a barré 3 nageurs postérieurement à son dessin des 12 nageurs, le nombre 3 lui vient plus rapidement à l'esprit.
Il ne formule pas une phrase de conclusion complète.

Second problème :

Le nombre de gâteaux est représenté sous forme de 5 boîtes de PICBILLE[16] où figurent toutes les unités sauf une : une erreur dans le groupement de droite de la quatrième boîte dessinée (4 au lieu de 5) .
On peut supposer que les 5 croix lui permettent de contrôler qu'il a bien 5 dizaines.
Il barre horizontalement et correctement les 38 éléments.
Il lit correctement[17] sa représentation (objets non barrés) pour conclure à tort qu'il lui reste 11 gâteaux.
Sa phrase de conclusion et l'égalité sont en accord avec sa procédure de recherche. Cela prouve bien que l'égalité 50 - 38 = 11 n'a pas été obtenue par une procédure de calcul.

3.

---

[15] exemples : P_1 enlever 38 à 50 c'est enlever 40 et ajouter 2, P_2 pour enlever 38 à 50 j'enlève 3 dizaines - il m'en reste 2- puis 8 unités prises dans l'une des dizaines restantes : il me reste finalement 2 unités et 1 dizaine soit 12.
[16] c'est la représentation déjà rencontrée chez Caroline et dans une moindre mesure chez Julie.
[17] L' utilisation de sa représentation, fausse dès le départ, est correcte. Mais, nous ne pouvons pas savoir comme il obtient le 11 : par comptage un à un des unités non barrées ? ou comme 1 boîte et 1 unité non barrée dans la quatrième boîte ? C'est pourquoi, nous utilisons le vocabulaire : lire sa représentation.

Pour l'exercice 1, les élèves ont choisi une représentation figurative où sont dessinés tous les nageurs (Caroline utilise en plus la représentation PICBILLE).
La taille des nombres le permet facilement : 12 nageurs au total.
Le "schéma" est utilisé ou non.
C'est parfois uniquement un élément qui est réalisé pour répondre à l'attente du maître et qui n'intervient pas dans la découverte du résultat (Julie et Edouard).

Au contraire, pour le deuxième exercice, la taille des nombres incite à une autre représentation plus élaborée et structurée en dizaines et unités (sauf encore pour la première représentation de Caroline).
De plus, désormais, le schéma est plus vraisemblablement utilisé pour produire le résultat.
Conclusion : les **nombres ont bien une influence sur le choix des schémas et des procédures de résolution de l'élève**. C'est donc très vraisemblablement une **variable didactique de la situation**.

SECOND VOLET (8 POINTS)

1)
a) la **notion mathématique** commune à toutes les activités ou problèmes cités est la **division euclidienne** (notons que seule l'activité 1, *LES MARACAS,* propose une situation dans laquelle le reste peut être non nul).

Remarque : les activités sont proposées en grande section de maternelle, en cours préparatoire, en cours élémentaire première année, ce qui montre bien que la notion mathématique peut rester non explicite, alors que l'activité même a du sens.

b) les objectifs généraux peuvent[18] être :
- **familiariser les élèves** avec des situations de **partage équitable**. Les élèves doivent s'approprier progressivement de telles situations,
- **développer des procédures empiriques** de résolution. Ces procédures évoluent avec les outils mathématiques dont ils disposent : d'une distribution effective à des procédures de calcul additifs, soustractifs ou multiplicatifs.
- **réinvestir ces outils** en les utilisant **dans des situations non standard**, différentes de celles de leurs introductions respectives.

2)
a) les objectifs de cette activité peuvent être :
- savoir **travailler dans un groupe** pour réaliser le partage équitable d'une collection d'une centaine d'objets déplaçables en 4 ou 5 parties.
- savoir **réinvestir le dénombrement** comme outil de réalisation de la tâche et comme moyen de vérification de l'équipotence des parties.

b) des procédures qui pourront être mises en oeuvre par des élèves de GS sont **principalement de trois catégories:**

Catégorie 1 :
- prélèvement[19] ou distribution un par un.

Catégorie 2 :
- distribution paquets par paquets (avec des paquets constants à chaque tour puis un réajustement du nombre de grains par paquet en fin de distribution).
- distribution paquets par paquets avec des paquets qui peuvent être différents à chaque tour (exemple : les élèves estiment qu'au début chacun d'entre eux peut en prendre 10, puis ils essaient 5 et estiment pouvoir recommencer, etc.)

---

[18] il est toujours très difficile de connaître les objectifs précis assignés à des activités.
[19] cela peut être un prélèvement si chaque élève prend personnellement des grains, une répartition si les élèves séparent les grains sur la table ou une distribution si l'un des élèves la prend en charge pour tous mais ce vocabulaire -prélèvement, répartition, distribution- n'est pas clairement défini

En cas d'impossibilité d'une dernière distribution par paquets, les élèves peuvent la remettre en cause et l'annuler (mais cela suppose que les grains n'ont pas été intégrés aux tas déjà constitués), ou décider de tout recommencer ou de tenter un réajustement.

Catégorie 3 :
- répartition par essais successifs : On en prend chacun 10. Il en reste trop. On les remet dans le tas et on recommence ; on en prend chacun 20...mais on ne peut pas car il n'y a pas assez de grains, on recommence ... etc..

Au cours ou à la fin de l'activité, les élèves peuvent contrôler leurs tas en recomptant les grains en leur possession. Peut alors se poser le problème du réajustement : si x en a 2 de plus que y, il suffit qu'il lui en redonne 1 pour que les deux parts soient équipotentes.
Il est bien entendu que les élèves peuvent, au cours de leur travail, passer d'une procédure à une autre.

3)

Il s'agit d'imaginer une mise en oeuvre mettant en jeu toutes les tâches évoquées. Les tâches sont les suivantes :

Tâche 1 : partager équitablement une collection de gommettes de part et d'autre d'une ligne.

Tâche 2 : compléter la deuxième moitié vierge d'une bande contenant des gommettes de manière à obtenir deux parties équipotentes.

Tâche 3 : déterminer, dans une collection de gommettes, une ligne de partage équitable.

Tâche 4 : construire, sur une bande, une collection de gommettes ayant deux fois plus d'éléments qu'une bande de référence contenant des gommettes.

<u>Exemple de mise en œuvre :</u>
- nous nous situons dans le cadre d'un fonctionnement de la classe par ateliers et les activités proposées ne concerneront que l'atelier, dit "principal", de 6 élèves.
- la mise en oeuvre est celle d'une séquence de classe composée de plusieurs séances (unité de temps de 15 à 30 minutes, 45 minutes maximum).
- nous supposons que tous les élèves d'un même groupe de 6 savent dénombrer dans un certain champ numérique (30 est un nombre possible, il est familier : nombre des présents dans la classe, calendrier mensuel). Le nombre d'élèments des collections en jeu pourra donc être différencié selon les connaissances des élèves.

Considérons 3 équipes, émettrices ou réceptrices, de 2 élèves nommées A, B, C.

L'enseignant a préparé 2 collections équipotentes de gommettes rouges (un nombre pair) : l'une -notée Tr- servira de témoin, l'autre est donnée au groupe A. Etape 1 : Le **groupe A**, **émetteur**, réalise la **tâche T1** à l'aide de sa collection de gommettes rouges. Il découpe sa collection de gommettes rouges selon le trait réalisé.	L'enseignant a préparé sur une bande une collection d'un nombre pair de gommettes vertes Etape 1 : Le **groupe C**, **émetteur**, réalise la **tâche T3** à l'aide de la collection de gommettes vertes. Il découpe sa collection de gommettes verte selon le trait réalisé. L'une des partie est destinée à A, l'autre -notée Tv- sert de témoin.
Etape 2 : Le **groupe B, récepteur**, reçoit de A la demi-collection de gommettes rouges : c'est sa bande référence. Il doit réaliser la **tâche T4** à l'aide d'un stock de gommettes bleues. (Sa production est notée Pb).	Etape 2 : Le **groupe A, récepteur**, reçoit de C la demi-collection de gommettes vertes qu'il colle sur une bande vierge. Il doit réaliser la **tâche T2** à l'aide d'un stock de gommettes jaunes. (Sa production est notée Pj).
Etape 3 : Les **2 groupes A et B se rassemblent pour valider leur travail**. Il s'agit de comparer[20] du point de vue de leur nombre, la collection Tr et la collection Pb. Ils concluent : échec ou réussite.	Etape 3 : Les **2 groupes C et A valident leur travail** en comparant Tv et Pj. Les élèves concluent : échec ou réussite.

Pour les 2 séances suivantes, le maître effectue une permutation circulaire entre les 3 groupes, cela permettra à chacun de réaliser les 4 tâches.

REMARQUES :
- les tâches T1 et T3 sont similaires, ce qui permet d'expliquer en simultané les 2 tâches.
- nous supposons que la tâche T1 sera plus rapide à réaliser : cela permet à A d'être plus rapidement disponible pouur recevoir le travail de C.
- le maître peut prendre à sa charge des sous-tâches telles que : découpage selon le trait, collage des bandes... cela lui permet de réguler la marche des 3 sous-goupes.

Autre mise en oeuvre possible :

Etape 1 : A reçoit une bande comportant une ligne et un nombre pair de gommettes réalise la tâche 1 puis découpe la bande suivant la ligne.
Etape 2 : B et C reçoivent chacun une des 2 parties de la bande.
B doit coller sur une bande vierge le morceau reçu et s'acquitter de la tâche 2. C la tâche 4 et réalise donc une bande non partagée.

[20] Cette comparaison est facilitée du fait de la couleur différente des gommettes : il est possible de décoller les gommettes bleues et de réaliser une correspondance terme à terme avec les gommettes rouges.

Etape 3 : A reçoit la bande réalisée par C et doit s'acquitter de la tâche 3.
Etape 5 : comparaison, avec l'aide du maître, des différentes bandes partagées obtenues.

Puis permutation des rôles.

4)
a) La troisième tâche de l'activité BANDES ET GOMMETTES consiste à **partager une collection d'objets fixes** en deux collections équipotentes, contrairement aux *MARACAS* ou aux gommettes (tâche 1) où les objets peuvent être déplacés. La difficulté n'est pas du même ordre et certaines procédures devront être sinon abandonnées, du moins adaptées à cette nouvelle situation.

Les élèves seront autorisés à **utiliser un morceau de ficelle** pour matérialiser la ligne envisagée avant de dénombrer les gommettes des deux parties et d'éventuellement réajuster en déplaçant la ficelle. Cela permet de nombreux essais et soulage la mémoire.

b) Variables didactiques :

- Le **nombre de gommettes** : s'il est petit la détermination visuelle directe est possible : par exemple 2, 4 ou 6[21] gommettes. S'il est un peu plus grand, mais pas trop - jusqu'à 10, 12-, une estimation visuelle avec une erreur possible de 1 est envisageable. Au delà, dans le cas d'une configuration quelconque des gommettes, la procédure visuelle devient impossible.
- Le **nombre de parts** : 2 parts correspond à la situation de base. La situation est plus facile à gérer avec 2 nombres à contrôler, plutôt que 3 ou 4.
- La **valeur d'une part** (ici le quotient euclidien) qui touche aux 2 variables déjà vues. Comme dans la division, plus le quotient est grand plus la procédure sera longue et ardue.
- La **disposition spatiale des gommettes** : certaines dispositions prototypiques (constellations de dés, de cartes à jouer) ou symétriques ou à translation aident à mieux voir la ligne de partage. Au contraire, des gommettes disposées en 3 ou 4 paquets inégaux rendent le problème plus difficile. L'estimation visuelle est alors compromise.

c) Quelques procédures possibles pour des élèves de GS sont les suivantes :

- reconnaissance de petits nombres ou de figures prototypiques.

- repérage des dispositions symétriques ou à translations.

- dénombrement total et connaissance des doubles (10 c'est 5+5),

- estimation à vue de la position de la ligne. Placement de la ligne (ficelle). Dénombrement des deux parties obtenues et réajustement avec la difficulté évoquée plus haut : s'il y en a 2 de trop à droite il faut déplacer la ligne d'une gommette vers la droite.
- estimation du nombre-moitié. On compte 6 gommettes en partant de la gauche et on mémorise avec le doigt la dernière atteinte puis on compte les autres en partant de la droite. Si cela ne suffit pas, on essaie 7 ou 8. Si on dépasse le doigt posé on essaie 5.

[21] le choix du nombre 6 est fait car il est alors possible de décomposer ce nombre en 2 paquets de 3 (quantité que l'on peut reconnaître directement quelle que soit la configuration spatiale -"subitizer"-).

- comptage simultané en partant de chacun des deux bouts. Les 2 index accompagnent ces deux comptages en miroir. On s'arrête quand les deux doigts se rencontrent.
Ces deux dernières procédures supposent une plus grande dextérité concernant l'énumération des collections.

d) Pour se rapprocher du problème posé au CP on joue sur la variable “ nombre de parts ” (3 parts équitables) et sur la variable “ disposition des gommettes ” (3 paquets nettement séparés).

Exemple : un paquet de 7 gommettes à gauche, un groupe de 4 gommettes au milieu et un nuage de 13 gommettes à droite.
Tâche: partager, à l'aide de deux ficelles, en trois parties comptant le même nombre de gommettes

5)
Pour le problème des coquillages de l'annexe 3

<u>Procédures au CP :</u>
• par manipulation de la totalité : les différentes collections des trois enfants de l'histoire sont constitués à l'aide de matériel de numération (par exemple des barres dizaines et des cubes unités). On a alors un total de 7 barres et 8 cubes. Chaque enfant peut prendre 2 barres et 2 cubes. Il reste alors 1 barre et 2 cubes à partager entre 3. Pour y parvenir, il faut casser une barre dizaine. II reste alors 12 cubes à partager. Chaque enfant en reçoit 4, d'où 2 dizaines et 6 unités par enfant.
• par tâtonnements sans détermination du nombre total : l'élève peut imaginer que Bruno donne 5 coquillages à Claire. Par décomptage par exemple, il voit qu'il en a alors 28, Claire en a 25 et André 25 (cette transformation peut être effectuée en plusieurs étapes : Bruno donne 3 puis 2 coquillages). S'il en donne alors un à chacun, ils ont tous 26 coquillages.
Ce raisonnement peut éventuellement être accompli sur du matériel pédagogique (cubes et barres : cf. ci-dessus), et l'action décrite ainsi simulée .
• par calculs additifs (fin CP).: détermination du nombre global par le calcul 25+33+20=78, et recherche d'un nombre x vérifiant x+x+x=78. Le tâtonnement donne la réponse 20 est trop petit, 25 donne 75 et 26 convient

Pour le problème des billes de l'annexe 4 :

<u>Procédures au CE1 :</u>
• la première procédure décrite pour les CP est envisageable sans manipulation : avec la représentation de 11 barres et 14 unités, d'où 12 barres et 4 unités, le partage équitable entre 4 est facile. Chaque enfant reçoit 3 barres et 1 unité, soit 31 billes.
• par des calculs additifs 24+44+30+26=124 (nombre qui ne serait pas familier à des CP).

Puis essai de 30 :	30+30+30+30	=	60+60
		=	120
et ajustement :	31+31+31+31	=	124

• même méthode, mais en ayant recours à des écritures multiplicatives, voire aux premiers calculs multiplicatifs (fin CE 1) :

4x30	=	120.
4x31	=	(4x30)+4
	=	124.

NB : Le document laisse entendre que les élèves viennent de faire deux problèmes de partage en 3 et 4 de deux nombres donnés. On peut raisonnablement espérer qu'ils passeront par le calcul de la somme pour réinvestir ce qui vient d'être vu.

Toutes les procédures évoquées sont différentes de celles de GS. Elles marquent des évolutions entre les différents niveaux.

Evolution des procédures de niveau "comptages" :

Les GS agissent sur du matériel réel, les CP transforment les nombres évoqués en matériel de numération (cf première procédure des CP), les CE1 se contentent de les représenter (cf première procédure des CE1).

Evolution des procédures de niveau "calculs" :

Les CP effectuent des calculs additifs alors que les CE1 peuvent effectuer des calculs multiplicatifs.

LILLE

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIÈRE ÉPREUVE (8 POINTS)
MAÎTRISE DE CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES.

EXERCICE 1

1°) Appelons P le prix hors taxes en F du véhicule.
Pour avoir le prix avec une augmentation de 20,6% il faut multiplier par 1,206 :
55 000 = P × 1,206
Donc P = Erreur !
Après la baisse de la TVA, le véhicule coûte (en F) : $P_1 = P \times 1,196$
donc P_1= Erreur ! × 1,196 , soit environ 54 543,946 F arrondi à 54 544F.
Le prix après la baisse de la TVA est :

54 544 F

2°) Non, le prix du véhicule, toutes taxes comprises, n'a pas baissé de 1%.
En effet, s'il avait baissé de 1%, il serait égal, en F, à : P' = 55 000 × 0,99 = 54 450
Le prix que nous avons trouvé est supérieur à celui-ci : il a donc baissé de moins de 1%.
<u>Autre justification possible :</u>
Pour passer du prix TTC avant la baisse de la TVA au prix TTC après la baisse, nous avons multiplié par :

$$\frac{1{,}196}{1{,}206} \approx 0{,}991708 \text{............or.......} 100 - 99{,}1708 = 0{,}822$$

Donc le prix a baissé de 0,82% et non pas de1%.
On pouvait dire aussi : 0,991708 est différent de 0,99, donc la baisse n'a pas été de 1%.

EXERCICE 2

1ère partie **Construction de la courbe AB (voir figure page 243).**

<u>Remarque :</u> La figure doit être réalisée avec soin, en laissant bien apparents les traits de construction. Aucune explication n'est demandée ici au candidat.
Cependant, pour faciliter la compréhension, nous indiquons rapidement ci-après les principaux éléments de cette construction, et d'autre part, nous donnons la figure agrandie deux fois
<u>Description de la construction</u> <u>(qui n'avait pas à figurer sur la copie) :</u>
- report au compas d'un segment de longueur l_1 : [AB]
- construction de la médiatrice de ce segment ; elle détermine O, milieu de [AB].
- report d'un segment de longueur l_2, sur cette médiatrice, pour placer le point C.
- construction du demi-cercle de centre O et de rayon OA ; il détermine F
- construction de D et E sur ce demi-cercle par intersection avec des arcs de cercle de rayon OA et de centres respectifs A et B.

- tracé de (FD) et construction de la parallèle à (FD) passant par C : on place un point m sur (FD), le plus loin possible de F pour une plus grande précision, puis les arcs de cercle de centre C et de rayon Fm et de centre m et de rayon FC ; l'intersection de ces deux arcs de cercle est sur la parallèle cherchée. En joignant ce point à C, on détermine le point G, intersection avec la droite (AD).
- Construction analogue pour la parallèle à (OD) en G, qui détermine les points O_1 et O_2.
- O'_1 symétrique de O_1 par rapport à O, et G' intersection de (O_2O_1') et de (BE) . On vérifie que l'arc de cercle de centre O_2 et de rayon O_2G passe bien par G'.

2ème partie **Analyse de cette construction**

1) Nous avons construit les points D et E comme intersections du demi-cercle avec les cercles de rayon OA et de centres respectifs A et B ; les triangles OAD et OEB sont donc équilatéraux, de côté OA, leurs angles mesurent donc 60° ; donc les trois angles au centre interceptant les trois arcs AD, DE et EB, dont la somme mesure 180°, mesurent tous 60°. Ils sont donc de même longueur.
Le triangle OAD est donc équilatéral et les droites (OD) et (GO_1) sont parallèles .
Le triangle O_1AG est alors aussi équilatéral ; on peut par exemple le démontrer :

- en utilisant les angles correspondants :

L'angle $\widehat{O_1AG}$ vaut 60° (car c'est un angle du triangle OAD), et les angles $\widehat{AO_1G}$ et $\widehat{AOD}$ sont correspondants donc égaux. Le triangle O_1AG a alors deux angles égaux à 60°, il est donc nécessairement équilatéral.

- en utilisant le théorème de Thalès dans le triangle OAD :

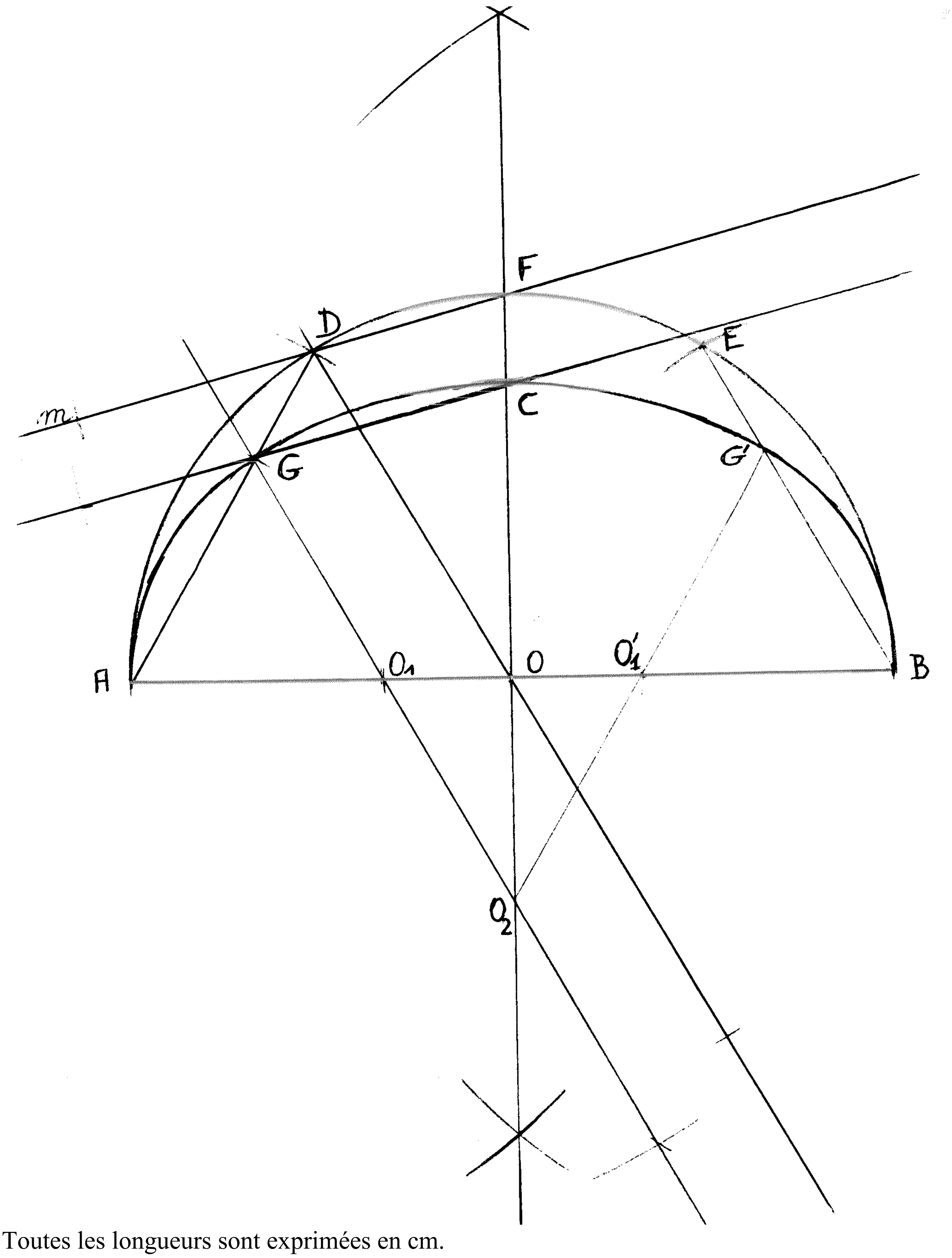
Dans cette configuration, on peut écrire **Erreur !** = **Erreur !** = **Erreur !**
et comme AD = AO = OD, on en déduit que $AG = AO_1 = O_1G$
Le triangle O_1AG est donc équilatéral.

2) Le triangle O_2GC est isocèle, avec $O_2G = O_2C$
<u>On n'attendait pas de démonstration ici</u> ; cependant là encore on peut utiliser les deux types de démonstration précédents.
Par exemple avec les angles correspondants :
Appelons K le point d'intersection des droites (DF) et(GO_2) ;
Les angles $\widehat{O_2CG}$ et $\widehat{OFD}$ sont égaux car correspondants (droites (CG) et (DF) parallèles).
Les angles $\widehat{OFD}$ et $\widehat{ODF}$ sont égaux car le triangle OFD est isocèle (OF = OD = OA).
Les angles $\widehat{ODF}$ et $\widehat{O_2KF}$ sont égaux car correspondants (droites (CG) et (DF) parallèles).
Les angles $\widehat{O_2KF}$ et $\widehat{O_2GC}$ sont égaux car correspondants (droites (CG) et (DF) parallèles).
En conclusion, les angles $\widehat{O_2CG}$ et $\widehat{O_2GC}$ sont égaux et le triangle O_2GC est isocèle.

3) La tangente d_1 en G au cercle de centre O_1 et de rayon O_1A est la droite passant par G et perpendiculaire à la droite (O_1G).
La tangente d_2 en G au cercle de centre O_2 et de rayon O_2C est la droite passant par G et perpendiculaire à la droite (O_2G).

Or les trois points G, O_1, et O_2 sont alignés, et comme il n'existe qu'une seule perpendiculaire à une droite donnée passant par un point, les deux tangentes d_1 et d_2 sont confondues.

3$^{\text{ème}}$ partie **Des calculs à réaliser**



Toutes les longueurs sont exprimées en cm.

1) Les triangles OAD et O_1AG sont équilatéraux, donc :

$O_1A = AG$ et $AG = AD - GD = OA - GD$ et $AB = 2\ OA$

Donc $O_1A = 4 - 1{,}37$

$\boxed{O_1A = 2{,}63 \text{ cm}}$

L'arc de cercle AG, de rayon O_1A, a un angle au centre $\widehat{,AO_1G}$ de 60°, c'est à dire **Erreur !** de 360°.
Dans un cercle, il y a proportionnalité entre longueur d'un arc et angle au centre intercepté, d'où, en appelant ℓ(AG) la longueur de l'arc AG :

$$\ell\,(AG) = \textbf{Erreur !} \times (2\,\pi \times O_1A)$$

$$\ell\,(AG) \approx \textbf{Erreur !} \times 2 \times 3{,}14 \times 2{,}63$$

$$\boxed{\ell(AG) \approx 2{,}75\text{cm}}$$

2) $OO_1 = OA - O_1A = 4 - 2{,}63$

$\boxed{OO_1 = 1{,}37 \text{ cm}}$

$OO_1 = GD$, ce qui est une des conséquences du théorème de Thalès appliqué dans le triangle AOD.
Le triangle OO_1O_2 est un triangle rectangle qui possède en O_1 un angle de 60° :
en effet les angles $\widehat{,AO_1G}$ et $\widehat{,O_2O_1O}$ sont "opposés par le sommet" donc égaux.
Son troisième angle $\widehat{,OO_2O_1}$ vaut alors 30° (le complémentaire de 60°) et ce triangle OO_1O_2 est donc un demi-triangle équilatéral :

$O_1O_2 = 2\ OO_1$ $\qquad\boxed{O_1O_2 = 2{,}74 \text{ cm}}$

$O_2G = O_2O_1+O_1G$ or $O_1G = O_1A$ (triangle équilatéral O_1AG) d'où
$O_2G = 2{,}74+2{,}63 = 5{,}37$ $\qquad\boxed{O_2G = 5{,}37\text{cm}}$

L'arc de cercle GC a pour angle au centre $\widehat{,GO_2C}$ qui vaut donc 30°, soit **Erreur !** de 360°.

Sa longueur est donc $\ell\,(CG) = \textbf{Erreur !} \times (2\,\pi \times O_2G)$

$$\ell\,(CG) \approx \textbf{Erreur !} \times 2 \times 3{,}14 \times 5{,}37$$

$$\boxed{\ell(CG) \approx 2{,}81 \text{ cm}}$$

3) Les arcs de cercle G'B et GA, d'une part, et G'C et GC d'autre part, étant symétriques par rapport à (OC), ont la même longueur ;

Donc $\ell\,(AB) = 2 \times [\ell\,(AG)+ \ell\,(CG)\,] \approx 2 \text{ x } (2{,}75 + 2{,}81) = 2 \text{ x } 5{,}56 = 11{,}12$

$$\boxed{\ell(AB) \approx 11.12 \text{ cm}}$$

DEUXIÈME ÉPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ÉLÈVES

QUESTION 1 : MULTIPLICATIONS EN COLONNES

• Pour la première multiplication (a) :
- colonne des unités : $5 \times 9 = 45$, il pose 5, et la retenue 4 dans la colonne des dizaines ;
- colonne des dizaines : $1 \times 4 = 4$ et $4 + 4 = 8$;

• pour la deuxième multiplication (b) , on vérifie qu'il procède de la même façon :
- unités : $5 \times 3 = 15$ il pose 5 et met la retenue 1
- dizaines : $0 \times 2 = 0$ et $0 + 1 = 1$
- centaines : $3 \times 5 = 15$

On peut dire qu'il s'inspire surtout de la technique de l'addition : il procède colonne par colonne en partant de celle de droite ; il adapte cette technique pour la multiplication en effectuant le produit des nombres correspondants, au lieu d'en effectuer la somme.

QUESTION 2 : MULTIPLICATION EN LIGNE (C)

On peut penser qu'il a essayé d'utiliser en ligne la technique précédente, en ajoutant mentalement un zéro aux dizaines devant le 5, pour que les deux facteurs aient le même nombre de chiffres : $5 \times 6 = 30$ j'écris 0 et je retiens 3 puis $0 \times 3 = 0$ et $0 + 3 = 3$.
Il a commencé par écrire 3, mais peut-être a-t-il trouvé impossible d'obtenir un nombre plus petit que 36, alors il a fait « 3 + 3 » ; il a obtenu 60, qui lui a paru plus vraisemblable.

Autre explication : il a bien multiplié les chiffres des unités et mis la retenue, mais n'a plus de produit à faire puisque le multiplicateur n'a qu'un chiffre, il écrit d'abord le résultat 30 de 5×6, puis se résout à additionner la retenue 3 au chiffre 3 des dizaines et réécrit 6 sur le 3 du résultat.

QUESTION 3 : MULTIPLICATION EN LIGNE (D)

On peut faire l'hypothèse qu'il a essayé d'appliquer toujours la même technique :
unités : $0 \times 0 = 0$ dizaines : $7 \times 0 = 0$ centaines : $0 \times 3 = 0$
Obtenant ainsi trois zéros, cela lui a paru impossible, et comme il n'y avait aucune retenue, il ne voyait pas ici d'ajustement possible de sa technique, comme dans le cas précédent.

QUESTION 4 : DIVISIONS

Première division (e) :
- Il divise successivement par 4 chaque « chiffre » en partant de la droite : « 6 divisé par 4 ; 1 et il reste 2 » puis passe aux dizaines « 3 divisé par 4, 0 et il reste 3 », puis la même chose aux

centaines ; on peut noter qu'avec sa technique, il obtient les quotients dans l'ordre inverse des chiffres du dividende.
- Comme pour la multiplication, on retrouve ici l'idée de procéder chiffre par chiffre en commençant par la droite.

Deuxième division (f) :

Sur la première ligne, il applique la technique précédente à la division du dividende par 6, chiffre des unités du diviseur.

Sur la deuxième ligne, il applique cette technique à la division de ce même dividende par 2, chiffre des dizaines du diviseur. On peut noter qu'il n'a pas retenu de la technique usuelle de la division le fait que l'on utilise les restes obtenus pour continuer l'opération.

QUESTION 5

Savoirs mathématiques :

- Il connaît certains résultats de la table de multiplication, au moins ceux rencontrés ici (table de 5).
- En particulier, il n'a pas fait d'erreur dans les produits par 1 et par 0, qui sont source de difficultés pour beaucoup d'élèves (surtout 0).
- Il sait diviser un nombre de 1 chiffre par un nombre de 1 chiffre, et en particulier quand le quotient est 0, ce qui est tout à fait remarquable.

Savoir-faire :

- Il a acquis une partie commune aux algorithmes additif et multiplicatif : écrire « en bas » le chiffre des unités du nombre obtenu, et le chiffre des dizaines en haut de la colonne suivante ; il sait qu'il faut ensuite ajouter cette retenue.
- Il a retenu de la technique de la division le fait d'écrire les restes sous les nombres de départ, et les quotients sous le diviseur .
- Il effectue mentalement correctement les calculs soustractifs des restes dans les divisions.

SECOND VOLET (8 POINTS)

PARTIE "DÉCOUVERTE" :

QUESTION 1

En reportant au compas le segment unité sur les segments C, B ,D, E, nous trouvons :
Sébastien : D Eléa : C Romain : E Margaux : B et nous en déduisons Mélanie : A

QUESTION 2

2-a

- L'élève doit connaître la notion de segment, en avoir déjà tracés .
- Il doit avoir déjà la notion de mesure de longueur, par report d'une unité, cette unité pouvant être choisie arbitrairement .
- Il doit savoir effectuer des reports de longueur (avec un gabarit, qu'il devra ici réaliser lui-même, ou bien avec le compas) et avoir l'habileté nécessaire pour le faire avec assez de précision.
- Il doit être capable :

- soit d'organiser sa recherche pour arriver à réaliser une correspondance un à un entre les 5 enfants et les 5 segments, même s'il ne comprend pas bien tous les messages, en particulier les notations 1/2, 1/4 et 5/4, qui n'ont pas encore été enseignées, comme le montre la progression.
  - D, C et E peuvent être trouvés d'abord, en utilisant seulement les mesures entières et l'encadrement : pour Eléa, l'élève peut retenir que la mesure est entre 2 et 3, même s'il ne comprend pas la notation 1/2; et pour Romain, il peut comprendre qu'elle est supérieure à 3; et ces informations sont suffisantes pour trouver les segments.
  - le A peut être trouvé ensuite : la notion de demi est assez connue, même si elle n'a pas encore été enseignée.
  - et le B s'en déduit, même si l'on ne comprend pas la notation 5/4.

- soit de décoder au moins les notations 1/2 et 1/4, en utilisant les explications de Romain, et/ou ses connaissances extra-scolaires.

2-b

La principale difficulté pour l'élève est d'arriver à se représenter ce que les enfants de la fiche ont fait sans avoir lui-même réalisé une telle activité, et en particulier sans s'être lui-même posé le problème de mesurer des segments, quand la mesure n'est pas entière.
Une autre difficulté est l'organisation de la recherche : certains examineront tantôt un segment, tantôt un message, ils buteront sur une notation fractionnaire, sans arriver à conclure.

QUESTION 3

On pourrait proposer aux élèves de mesurer eux-mêmes des segments avec une unité donnée, en les choisissant de façon à obtenir des mesures du même type que celles du livre : entières, ou avec des demis ou des quarts.

Pour que l'activité ait plus de sens, et que les élèves puissent valider eux-mêmes leur travail, on pourrait proposer une situation de communication écrite, entre des groupes émetteurs et des groupes récepteurs : les émetteurs reçoivent un segment et le segment unité ; les récepteurs ont le segment unité et plusieurs segments. Les émetteurs doivent envoyer à leurs récepteurs la mesure de leur segment avec l'unité donnée ; les récepteurs, à l'aide de cette mesure, doivent trouver, parmi leurs segments, celui qui a la même mesure que le segment de leur émetteur. La validation se fait en superposant les deux segments.

QUESTION 4

Rappel : on appelle variables didactiques d'une situation-problème des paramètres de la situation qui ont une influence sur le choix des procédures de résolution.

Remarque : Il n'était pas demandé de donner cette définition ici, mais il fallait essayer de la mettre en œuvre. Cela suppose en particulier que l'on ait déjà examiné les procédures de résolution, ou qu'on le fasse à ce moment-là. Ici, la question était particulièrement embarrassante, car on ne savait pas s'il s'agissait du problème posé aux enfants fictifs de la fiche, ou du problème des élèves de CM1 qui font cette fiche ; nous avons essayé de donner une réponse en privilégiant le cas du problème posé aux élèves de CM1.

a) le choix des longueurs des différents segments est la variable essentielle de cette situation puisqu'il conditionne le type de fractions mis en jeu dans ces mesures :

- ici, les longueurs des segments nécessitaient seulement des demis et des quarts ; dans ce cas, les élèves peuvent trouver la mesure par pliage du segment unité . Si les longueurs avaient nécessité des fractions « quelconques », il aurait fallu proposer au préalable une méthode pour partager les segments en un nombre quelconque de segments de même longueur, par exemple le « guide-âne » que l'on rencontre dans d'autres séances.
- le fait qu'il y ait aussi des mesures entières (une ici) et qu'elle figure en premier, peut permettre à certains élèves « d'entrer dans la situation », c'est à dire d'envisager « une procédure de base », alors qu'ils auraient pu être arrêtés d'emblée par des notations qu'ils n'auraient pas comprises. Et cela permettra aussi d'envisager les nombres entiers comme des nombres fractionnaires particuliers.
- le fait que l'on puisse réussir, ou non, par encadrement entre deux entiers, sans connaître la notation fractionnaire, change aussi, bien sûr, les procédures de résolution de l'exercice : s'il y avait eu des segments de mesures respectives 2 + 1/4 et 2 + 1/2, il aurait fallu comprendre ces notations pour réussir, alors qu'ici, nous avons vu que ce n'était pas indispensable.
- le fait qu'il y ait des segments plus petits que l'unité, et d'autres plus grands est important aussi ; en ne proposant que des segments plus petits que l'unité, on introduirait seulement des fractions inférieures à 1.

b) la formulation des messages est aussi très importante :

des formulations comme celle d'Eléa incitent plutôt à une procédure par encadrement entre deux entiers, des formulations comme celle de Romain, qui explicite la procédure de pliage, vont plutôt dans le sens d'un décodage de la notation fractionnaire.

c) <u>Le nombre de segments proposés et l'ordre des messages</u> peuvent intervenir aussi sur le choix de la procédure : on peut imaginer que si le message de Romain était en premier, beaucoup plus d'élèves essaieraient de comprendre la notation 1/4 avant de continuer.

d) <u>Le choix d'une unité non conventionnelle</u> (environ 4,7 cm) rend très difficile l'utilisation de la règle graduée ; or même si la consigne l'interdit, certains auraient pu être tentés...

PARTIE "EXERCICES ET PROBLÈMES" :

QUESTION 5

Les fractions privilégiées sont celles de dénominateur 2 et 4.
On peut penser que l'auteur a fait ce choix parce que ce sont des fractions que les élèves ont déjà rencontrées, par exemple pour la lecture de l'heure.
Pour obtenir de telles fractions, il faut partager le segment unité en deux ou en quatre, ce qui est facile à réaliser par pliage, c'est bien le procédé indiqué par l'auteur.

QUESTION 6

6-A

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ $\quad 2\times\frac{1}{2}=1 \quad AB=\frac{1}{2} \quad CD=3 \quad EF=1+\frac{1}{2}=3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

et aussi $\frac{3}{2}$

$$GH=2+\frac{1}{2}=5\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

et aussi $\frac{5}{2}$

6-B

Les écritures rencontrées en 1a) sont suffisantes pour résoudre 1b) : les mesures des segments peuvent s'écrire avec des nombre entiers, ou la fraction 1/2, ou des produits de cette fraction par un entier, ou des sommes de plusieurs fractions 1/2, écritures vues en 1a).
Elles ne sont pas suffisantes pour comprendre l'exercice 2, qui propose des fractions avec des écritures différentes de 1a) : 5/2 ; 3/2 et 9/2 qui ont des numérateurs différents de 1.

QUESTION 7

Les intentions pédagogiques sont :

a) réinvestir les connaissances introduites plus haut :

- construire un segment dont la mesure est donnée sous la forme fractionnaire, et en particulier sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 et de dénominateur 4 ; l'élève utilise pour cela le segment unitaire, et des segments de longueur 1/2 et 1/4.
- trouver, pour la mesure d'un segment donné, diverses écritures avec les fractions 1/2 et 1/4. L'exemple donné laisse penser que l'auteur attend surtout une fraction unique de dénominateur 4.

b) commencer à établir des propriétés permettant de passer d'une écriture fractionnaire à une autre, et en particulier, établir des égalités du type 5/4=1+1/4, comme le montre le document 3.
Pour trouver d'autres écritures, l'élève peut :
- soit utiliser le segment et chercher un autre codage de sa mesure (par exemple, il constate que [AB] contient 5 fois le segment 1/4),
- soit chercher à partir de l'écriture 1+1/4 (il a vu que 1 = 1/4+1/4+1/4+1/4, la mesure peut s'écrire 1/4+1/4+1/4+1/4+1/4 = 5x1/4 = 5/4.)

On peut penser que l'intention de l'auteur est de donner du sens à ce travail sur les écritures, en le mettant en relation avec différents codages de la longueur d'un segment.

c) de la même façon, commencer à établir des règles pour comparer des écritures fractionnaires, à partir de la comparaison des longueurs des segments correspondants.

APPROCHE DE LA NOTION DE FRACTION :

QUESTION 8

Les fractions sont introduites ici pour désigner des mesures de longueurs de segments ; elles pourraient désigner de la même façon les mesures d'autres grandeurs : aires, masses, durées.
La conception développée ici est celle de partage de l'unité : la longueur « v=5/4u » signifie que l'on a partagé l'unité u en 4 morceaux identiques, et que l'on a assemblé 5 de ces morceaux pour réaliser l'objet de longueur v.

Autres conceptions :

- codage de points sur la demi-droite numérique
- quotient de deux entiers
- composition de deux fonctions : « × 5/4 » signifie que l'on effectue successivement un produit par 5 et une division par 4
- encore dans le contexte « mesure », situation de commensuration : « v = 5/4 u » signifie que si l'on assemble 4 objets de longueur v, on obtient un objet de longueur 5u.

Exemple : la situation de l'automate ("*ERMEL* CM" tome 2 1982)
Un automate fait des sauts réguliers sur une droite graduée avec l'unité u ; on constate qu'en 4 sauts, il parcourt exactement 5u ; on désigne par 5/4 la mesure de la longueur de son saut avec l'unité u.

Limoges

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

QUESTION 1

Réponse : **Les nombres 0, 1, 5 et 6 sont les seuls nombres naturels à un chiffre, égaux au chiffre des unités de leur carré.**

Démonstration par exhaustivité : n est un entier à un chiffre, inférieur à 10, dix cas sont à envisager.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Autre démonstration : Soit u un nombre entier à un chiffre. Le nombre u étant inférieur à 10, son carré u^2 est inférieur à 100 et s'écrit avec deux chiffres dans le système décimal. Notons d le chiffre des dizaines de u^2 . Le chiffre des unités de u^2 étant égal à u, alors $u^2 = 10d + u$. On en déduit $u^2 - u = 10d$, ce qui peut s'écrire :
$u (u – 1) = 10d$. Cette dernière égalité traduit le fait que le produit des nombres entiers consécutifs $u – 1$ et u doit être un multiple de 10. Deux cas sont à envisager. Premier cas : Le multiple de 10 est le nombre zéro, l'un de ces deux nombres $u – 1$ ou u est donc lui-même égal à 0 ; on retrouve ainsi les deux solutions :
$u = 0$ ou $u = 1$ évoquées précédemment. Second cas : Ces deux nombres étant différents de 0 et de 1, étant consécutifs, donc premiers entre eux, l'un des deux doit être égal à 5. On obtient ainsi les deux autres solutions : $u = 5$ ou $u = 6$.

QUESTION 2

a)

Soit A = $\overline{du}$ un nombre entier naturel à deux chiffres, où d désigne le chiffre des dizaines (donc $0 < d \leq 9$) et u désigne le chiffre des unités ($0 \leq u \leq 9$).

$A^2 = \overline{du}^2$
$A^2 = (10d + u)^2$
$A^2 = 100\ d^2 + 20du + u^2$.

Le chiffre des unités de $\overline{du}^2$ est égal à celui de u^2, on retrouve donc le résultat de la question précédente : Si les deux nombres $\overline{du}$ et $\overline{du}^2$ ont le même chiffre des unités, alors **u prend nécessairement l'une des quatre valeurs possibles : 0, 1, 5 ou 6.**

b)

On sait que de plus les deux nombres $\overline{du}$ et $\overline{du}^2$ ont le même chiffre des dizaines ; considérons successivement chacun des cas ;

- Si u = 0 : $\overline{du}^2 = 100\ d^2$, qui est un nombre entier de centaines. Son chiffre des dizaines est égal à 0 : Le chiffre d doit prendre la valeur 0 et de ce fait A = 0. Ce nombre ne pouvant être considéré comme un nombre à deux chiffres, on ne retiendra pas cette solution.
- Si u = 1 : $\overline{du}^2 = 100\ d^2 + (10\times 2d) + 1$. Le chiffre des dizaines de A^2 est le chiffre des unités de 2d. Il doit être égal à d. Soit 2d = d, ce qui entraîne d = 0, ce qui est impossible ; soit 2d = 10 + d ce qui entraîne d = 10, ce qui est impossible aussi.
- Si u = 5 : $\overline{du}^2 = 100\ d^2 + 100d + 25 = 100\ (\ d^2 + d\ ) + 25$. Le chiffre des dizaines de ce nombre est donc égal à 2. Il faut donc que d soit égal à 2. Voici une première solution **: A = 25 et A^2 = 625**.
- Si u = 6 : $\overline{du}^2 = 100\ d^2 + 120\ d + 36 = 100\times(\ d^2 + d\ ) + 10\times(2d + 3) + 6$. La recherche des nombres 2d + 3 ayant un chiffre des unités égal à d peut se faire rapidement de manière exhaustive :

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2d + 3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Seule solution : d = 7 ; **A = 76 et A^2 = 5 776**.

Réponse : Les deux seuls nombres à deux chiffres ayant même chiffre des unités et même chiffre des dizaines que leurs carrés sont **25 et 76**.

QUESTION 3

Les nombres B à trois chiffres tels que B et B^2 aient à la fois même chiffre des unités, même chiffre des dizaines et même chiffre des centaines sont 625 et 376.
Vérification: **Si B = 625 alors B^2 = 390 625. Si B = 376 alors B^2 = 141 376.**

Une justification (non demandée) pourrait être la suivante :
Soit B = $\overline{cdu}$. Les nombres $\overline{cdu}^2$ et $\overline{cdu}$ ont le même chiffre des centaines, dizaines et unités.

- Premier cas : d = 2 et u = 5.

$B = \overline{c25}$
$B = 100\ c + 25$
$B^2 = 10\ 000\ c^2 + 5\ 000\ c + 25^2$
$B^2 = 10^3\ (10\ c^2 + 5\ c) + 600 + 25$
Quelque soit c, le chiffre des centaines de B^2 est égal à 6 ; pour qu'il soit égal à c, il suffit que **c = 6 et B = 625**.

- Deuxième cas : d = 7 et u = 6.

$B = \overline{c76}$
$B = 100\ c + 76$
$B^2 = 10\ 000\ c^2 + 2\times 76\ c\times 100 + 76^2$
$B^2 = 10^4\ c^2 + 152\times 100\ c + 5\ 776$

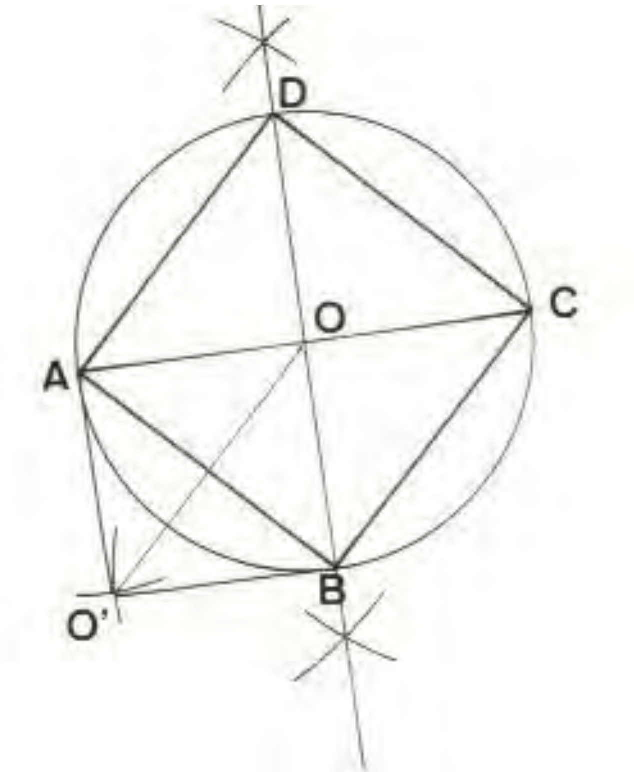
$B^2 = c^2 10^4 + (15\,c + 5)10^3 + (2c + 7)10^2 + 76$

Le chiffre des unités de 2c + 7 doit être égal à c :

$2c + 7 = c$	impossible
$2c + 7 = 10 + c$	entraîne **c = 3 et B = 376**
$2c + 7 = 20 + c$	impossible

EXERCICE 2

QUESTION 1



1.a

Tracer un diamètre [AC] du cercle **C**. Tracer la médiatrice de [AC]. Cette droite passe par le point O et coupe le cercle **C** en B et D. Les segments [AC] et [BD] sont les diagonales du quadrilatère convexe ABCD. Par construction, ces diagonales ont le même milieu O, centre du cercle **C** : Le quadrilatère ABCD est donc un parallélogramme. Ces diagonales sont perpendiculaires par construction, ABCD est donc un losange. Ces diagonales sont isométriques, ABCD est donc un rectangle. Par conséquent ABCD est un carré.

1.b

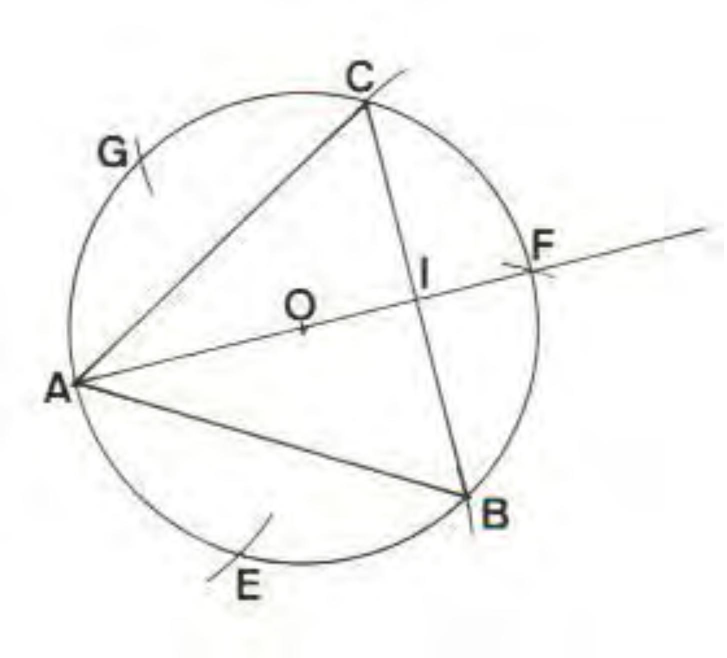
1ère méthode : [AB] est l'hypoténuse du triangle rectangle et isocèle AOB. L'application du théorème de Pythagore dans ce triangle nous permet de connaître directement le carré de la mesure du côté [AB] du carré ABCD : $AB^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2$.

2ème méthode : L'aire d'un losange est le demi-produit des mesures de ses diagonales. ABCD est un losange particulier. Ses diagonales ont chacune une mesure égale à 2r. L'aire du carré ABCD est donc égale à $\frac{2r \times 2r}{2} = 2\,r^2$.

L'aire du carré ABCD a donc pour mesure 2 r^2.

QUESTION 2.
O' étant le symétrique de O par rapport à (AB), la droite (AB) est la médiatrice du segment [OO']. On en déduit que les quatre segments [OA], [OB], [O'A] et [O'B] ont la même mesure égale à r. Le quadrilatère AO'BO est donc un losange. Ce losange ayant un angle droit (situé en O) est aussi un carré. De ce fait, ses diagonales sont isométriques : OO' = AB.
La mesure de OO' est par conséquent constante et égale à $r\sqrt{2}$. Lorsque l'on fait tourner le carré ABCD autour de O, **le point O' décrit un cercle de centre O et de rayon r $\sqrt{2}$.**

QUESTION 3.



a)
Choisir un point A sur le cercle **C**. Construire un hexagone régulier AEBFCG dans le cercle **C** en reportant six fois le rayon sur le cercle. Tracer les segments [AB], [BC] et [CA]. On obtient un triangle ABC. Montrons que le triangle ABC obtenu est un triangle équilatéral.
Les trois triangles AOB, BOC et COA sont isocèles, de sommet O. Chacun des angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ et $\widehat{COA}$ a une mesure égale à 120°. Ces trois triangles sont donc superposables et leurs côtés [AB], [BC] et [CA] sont isométriques. On en déduit que le triangle ABC est un triangle régulier, équilatéral.
Calcul de la mesure de son aire : Soit I le milieu du côté [BC]. AI est la mesure de la hauteur associée au côté [BC]. L'aire du triangle ABC est donc égale à $\frac{1}{2} \times BC \times AI$.

- Calcul de AI :

Première méthode : I est le centre du losange OBFC.

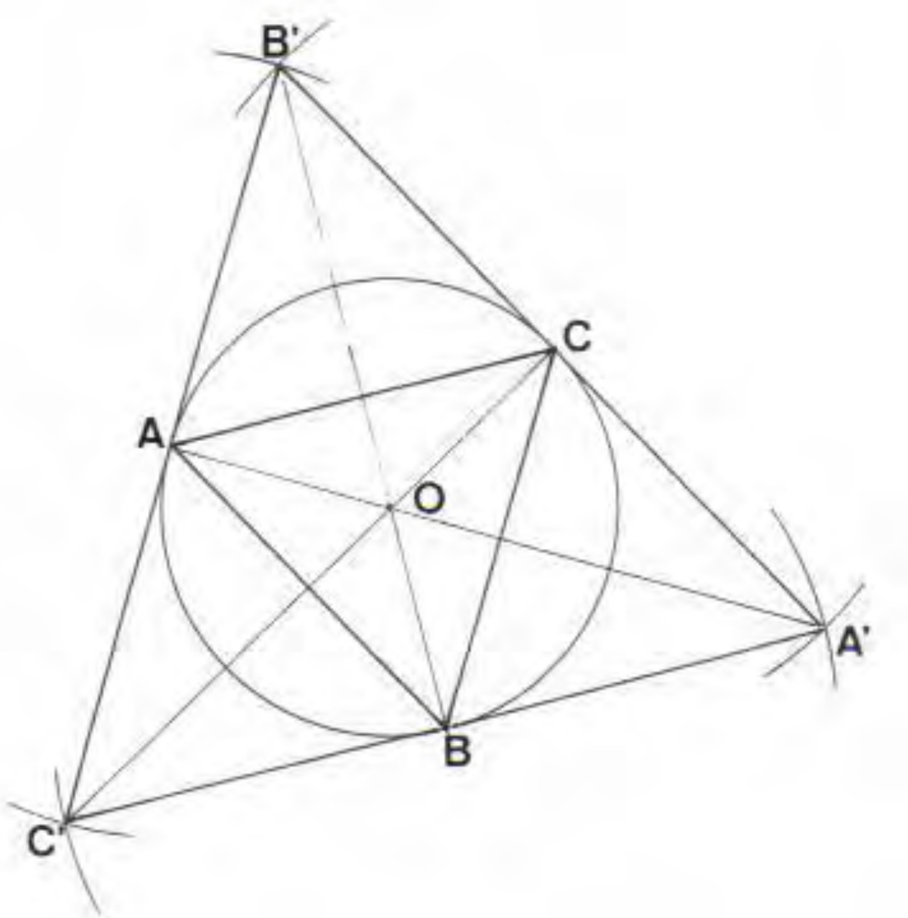
$$OI = \frac{1}{2}OF = \frac{1}{2}r \text{, donc } AI = r + \frac{r}{2} = \frac{3}{2}r .$$

Deuxième méthode : AI est la hauteur du triangle équilatéral dont O est le centre de gravité. AO = $\frac{2}{3}$AI, donc r = $\frac{2}{3}$AI. On obtient ainsi AI = $\frac{3}{2}$r .

- Calcul de BC : BC = 2 BI. Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle BIO rectangle en I : $BI^2 = OB^2 - OI^2$. Soit, en exprimant ces mesures en fonction de r, $BI^2 = r^2 - \frac{1}{4} r^2$,$BI^2 = \frac{3}{4} r^2$. D'où $BI = \frac{\sqrt{3}}{2} r$ et $BC = r\sqrt{3}$.

  L'aire du triangle ABC est donc $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} r \times r\sqrt{3}$, ce qui s'écrit $\frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$.

b)

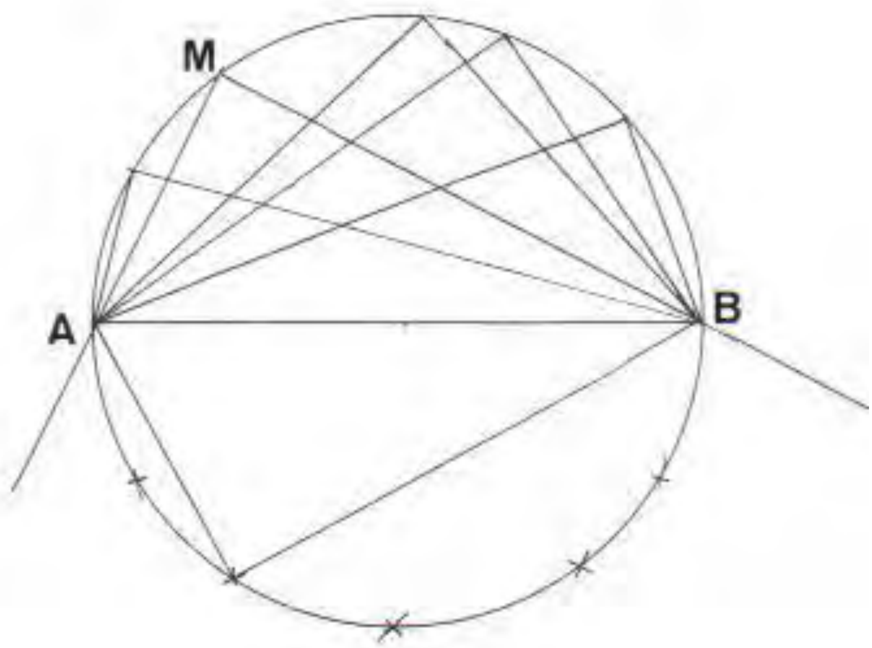


ABC étant un triangle équilatéral, il en est de même des trois triangles BA'C, CB'A et AC'B, symétriques du triangle ABC respectivement par rapport aux droites (BC), (AC) et (AB). Les six segments [BA'], [A'C], [CB'], [B'A], [AC'] et [C'B] sont tous isométriques à [AB].
Montrons que les points A', C et B' sont alignés : La somme des trois angles $A'\hat{C}B$, $B\hat{C}A$ et $A\hat{C}B'$ est la somme de trois angles d'un triangle équilatéral, ayant chacun pour mesure 60°.
L'angle $A'\hat{C}B'$ est donc un angle plat et, par conséquent, les points A', C et B' sont alignés.
Un raisonnement analogue conduirait à démontrer que les points B', A et C' sont alignés, de même que les points C', B et A'. **Les trois segments [A'B'], [B'C'] et [C'A'] sont donc isométriques. Leur mesure commune est égale à 2AB. Le triangle A'B'C' est un triangle équilatéral et, de plus, C est le milieu de [A'B'], A est le milieu de [B'C'] et B est le milieu de [C'A'].**
Les droites (A'A), (B'B) et (C'C) sont les médianes du triangle équilatéral A'B'C'. De ce fait, elles sont aussi les médiatrices de ses côtés et ses bissectrices intérieures. Ces droites sont concourantes. Le point O étant sur la médiatrice de chacun des côtés de ABC (A, O et A' sont

alignés, de même que B, O et B' puis que C, O et C'), O est le point commun aux trois droites (A'A), (B'B) et (C'C). Le point O est le centre du cercle inscrit dans le triangle A'B'C'. Ce cercle est tangent en A, B et C respectivement à chacun des côtés de A'B'C'.
Le cercle C est le cercle inscrit dans le triangle A'B'C'.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

QUESTION 1



1.a
En plaçant une équerre de sorte que les bords correspondant aux côtés de son angle droit soient toujours l'un sur un point A et l'autre sur un point B distinct de A, le point M situé au sommet de l'angle droit de l'équerre est tel que le triangle AMB est rectangle en M. Dans tous les cas de figure, un tel triangle s'inscrit dans le cercle de diamètre [AB]. L'ensemble des points M est donc un cercle. **Les dix points dont on demande la construction sont situés sur un cercle passant par A et B et dont le centre est le milieu de [AB].**

1.b
La propriété géométrique mise en évidence peut s'exprimer ainsi :
Etant donnés deux points A et B distincts, tous les angles droits $A\hat{M}B$ sont inscrits dans le cercle de diamètre [AB].
Ou bien : Etant donnés deux points A et B distincts, les M tels que (AM) et (BM) soient perpendiculaires sont sur le cercle de diamètre [AB].

QUESTION 2
Les constructions 1, 5 et 6 représentent des réponses incorrectes.
Construction 1 : Les douze points construits sont situés sur deux arcs de cercles n'ayant pas le même centre, ni le même rayon (le point A est cependant une extrémité commune de ces deux arcs). Les 7 points situés « au dessus » de (AB) sont très correctement placés sur un demi-cercle de diamètre [AB], mais les 5 autres points, situés « en dessous » de (AB), sont

placés sur un demi-cercle ayant un diamètre dont A est une extrémité, mais dont l'autre extrémité est le point M situé au dessus de B, le plus proche de ce dernier.
Il est probable qu'ayant retourné son équerre afin de placer des points dans le demi-plan inférieur, l'élève a commis l'erreur de prendre un second point fixe autre que B, assez proche cependant de celui-ci. Peut-être le point B était-il caché sous son équerre si celle-ci n'était pas en une matière transparente… Il s'agit donc sans doute d'une erreur de manipulation dans l'action, le problème semblant être bien compris.

Construction 5 : L'élève a placé ses dix points sur deux droites (5 sur chacune !). Ces droites sont parallèles aux bords « verticaux » de la feuille, mais également perpendiculaires au segment [AB] tracé. On peut émettre deux hypothèses correspondant chacune à une compréhension incorrecte de l'énoncé :
- Soit l'élève a confondu les termes et les concepts de « perpendiculaire » et de « verticale », et considéré que la consigne de l'énoncé « la droite AM et la droite BM sont perpendiculaires » signifiait que ces droites devaient être verticales : La persistance de la confusion entre ces deux concepts et ces deux termes est parfois observée.
- Soit l'élève a interprété la consigne de l'énoncé « la droite AM et la droite BM sont perpendiculaires » en la complétant de sorte que pour lui elle devienne : « la droite AM et la droite BM sont perpendiculaires… à AB » . Cette seconde hypothèse paraît plus probable.

Construction 6 : Les dix points sont alignés sur une droite, apparemment « horizontale », du moins parallèle au bord supérieur ou inférieur de la feuille. Ces points ne respectent pas la consigne. Il est possible que cet élève ait essayé de « faire comme sur l'image », de « faire comme Louis ». En plaçant de la même façon son équerre et en la gardant bien fixement posée sur sa feuille, il a alors pu placer dix points le long du bord inférieur de son équerre (côté opposé à l'angle droit). En effet ces points n'ont pas été tracés sur un trait déjà existant. Ce pourrait donc être une interprétation erronée de la consigne « faire comme Louis », ainsi que du modèle que donne l'image, qui soit à l'origine de cette erreur. L'élève a placé dix points en faisant comme Louis, mais n'a pas compris que ces points correspondaient à des positions variables du sommet de l'angle droit.

QUESTION 3.

Construction 3 : L'élève a commencé par placer 9 points au dessus de (AB), comme le suggère l'image, puis a situé le dixième et dernier point en dessous, à égale distance de A et de B. Est-ce le sentiment de manquer de place pour placer un point de plus qui l'a amené à passer de l'autre côté de (AB) ? Le fait qu'il ait bien perçu que les points étaient sur « un rond », il l'a écrit, peut faire penser qu'il lui a fallu choisir un endroit pour placer un dernier point, le dixième… Dans la consigne « cherche au moins dix points » , il a tenu compte du nombre 10 de points à construire, mais pas de la possibilité que cette consigne donnait d'aller au delà de 10. L'expression « au moins » est restée inaperçue ou incomprise. Il en a été de même dans les travaux 5 et 6.

Construction 6 : Quel modèle l'image du manuel donne-t-elle ? Elle montre **une** façon de placer son équerre. L'énoncé n'indique pas que l'équerre peut, et doit, changer de position et, manifestement, cet élève l'a gardée dans cette position fixe sur sa feuille. D'autre part, sur l'image, le point M désigne le sommet de l'angle droit (le coin droit de l'équerre), et, de ce fait, la condition de l'énoncé « la droite AM et la droite BM sont perpendiculaires » est bien respectée ! Le point M étant fixé une fois pour toutes, l'élève a alors pu chercher dix points autres que ceux qui étaient définis. Les choisir le long du bord inférieur de son équerre présentait l'avantage d'être commode, et d'obtenir une ligne particulière ou jugée intéressante…

QUESTION 4.

Production 2 : L'élève a remarqué que tous les points étaient situés sur un même cercle, qu'il pouvait continuer à en tracer d'autres, au-delà de treize. Il n'a pas tracé ce cercle, avec un compas, ce qui aurait apporté un élément de preuve supplémentaire à sa remarque, mais aurait nécessité la localisation de son centre. Cependant, cet élève a très bien compris le problème.

Production 5 : « Tous les points sont alignés. »
Ce que dit cet élève est en partie inexact. Les dix points ne sont pas **tous** sur une seule et même droite, mais chaque groupe de cinq points se trouve effectivement sur une même droite. Il est vrai qu'en plaçant des points sur une droite, ces points se retrouvent nécessairement alignés…sur cette droite. La remarque de cet élève ne découle pas de la répétition d'une expérience dix fois réitérée (la construction demandée, chacune d'elles étant différente des précédentes), mais d'un tracé correspondant à une hypothèse a priori : l'élève a d'abord tracé les droites perpendiculaires à (AB) passant par A et par B, en utilisant probablement son équerre, puis placé cinq repères correspondant à cinq points sur chacune de ces deux droites.

SECOND VOLET (8 POINTS)

QUESTION 1
Les programmes officiels exigent qu'en cycle 2, les élèves aient connaissance des nombres entiers et de leurs désignations écrites, qu'ils aient acquis, en fin de cycle, la maîtrise de l'addition (c'est la seule technique dont la maîtrise soit exigée), et *aient effectué une approche des techniques* de la soustraction et *de la multiplication*, ainsi que *de la table de multiplication*. Les extraits des manuels donnés en annexes semblent vouloir dépasser cet objectif dans la mesure où ils proposent de faire appliquer par les élèves des techniques écrites, abouties, voire expertes.
Pour rester dans le cadre des programmes le maître peut s'appuyer sur l'exercice 1 de l'annexe 6 et le second procédé proposé dans l'annexe 4, l'objectif étant de se rapprocher ensuite des procédés 4 et 3 de ce même annexe, ou encore de la technique « de Marc » proposée dans l'annexe 5.
C'est l'annexe 4 qui semble le mieux correspondre aux exigences du programme, une fois retiré le premier exemple, proposant d'utiliser la technique « per gelosia ». Cette technique, aboutie, semble difficile à comprendre dans le temps d'une seule séance, à ce niveau de classe. Sa compréhension, telle qu'elle est présentée, relève davantage du cycle 3.
On pourra lire une étude plus détaillée des trois documents en note 1, en fin de corrigé.

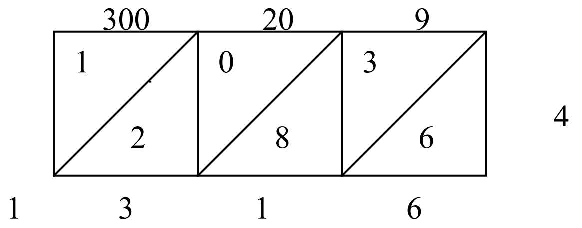
QUESTION 2
Expliquer la première technique de calcul : $329 \times 4 = (300 + 20 + 9) \times 4$
$329 \times 4 = 300\times4 + 20\times4 + 9\times4$
Les schémas ci-dessous montrent comment cette technique se justifie :

300	20	9	
1200	80	36	4

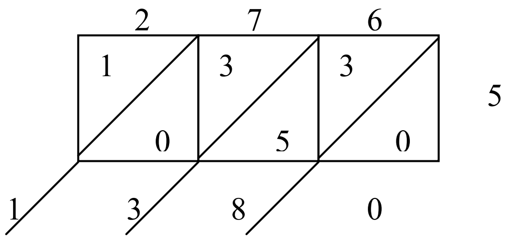
300	20	9	
12 centaines	8 dizaines	36 unités	4

300	20	9	
1 millier 2 centaines	0 centaine 8 dizaines	3 dizaines 6 unités	4

Les diagonales séparent les unités d'ordre différent, elles permettent de retrouver alignées en diagonales les unités de même ordre, milliers, centaines, dizaines et unités. Ceci pour effectuer l'addition des produits partiels, en suivant ces diagonales, et en tenant compte des éventuelles retenues.



Effectuer la multiplication 276 $\times$ 5 :



Le produit de 276 par 5 est égal à 1 380.
276 = 200 + 70 + 6. Le premier facteur a trois chiffres : On trace un tableau à trois colonnes, chaque case étant partagée par une diagonale. Dans chaque case, on place le produit du chiffre du premier facteur situé au-dessus par le chiffre du second facteur situé à l'extérieur, à droite. La diagonale sépare le chiffre des dizaines de celui des unités de chacun de ces produits.
$2\times5 = 10$; $7\times5 = 35$; $6\times5 = 30$.

Remarque : Cette technique offre certains avantages : On peut contrôler aisément tous les termes au cours de son exécution, on pourrait interrompre le calcul et le reprendre sans dommage puisque les retenues sont toutes écrites. La présence d'un chiffre 0 au multiplicande ne poserait pas de problème, la disposition générant automatiquement le décalage. Il suffit de connaître la table de multiplication et de savoir additionner pour appliquer cette technique.

QUESTION 3.

Le principe fondamental des techniques écrites de multiplication est la distributivité de la multiplication sur l'addition, après avoir décomposé canoniquement l'un des facteurs en séparant centaines, dizaines et unités (numération de position). Chacun de ces termes est ensuite multiplié par l'autre facteur. Les calculs se ramènent alors au produit de deux nombres d'un chiffre, en utilisant la règle dite « des zéros ». Il reste à additionner les produits partiels obtenus. L'intérêt consiste à limiter la liste nécessaire de produits à savoir à ce que l'on appelle la « table de multiplication ».

QUESTION 4.

Marc écrit l'intégralité de tous les produits partiels qu'il calcule successivement en les disposant en colonne, l'un sous l'autre, les chiffres des unités de même ordre étant alignés dans la même colonne. Il écrit tous les termes avec les zéros éventuels. Ainsi les chiffres correspondant à des dizaines, des centaines se trouvent-ils automatiquement situés dans la colonne correcte qui leur correspond.
$483\times549 = 3\times9 + 80\times9 + 400\times9 + 3\times40 + 80\times40 + 400\times40 + 3\times500 + 80\times500 + 400\times500$
$483\times549 = 27 + 720 + 3\,600 + 120 + 3\,200 + 16\,000 + 1\,500 + 40\,000 + 200\,000$
$483\times549 = 265\,167$
L'ardoise de Marc est barrée par une grande croix : Les auteurs du manuel ont oublié de dire pourquoi… S'agit-il simplement de ne pas confondre son ardoise avec celle de Sophie, dont l'ardoise touche la sienne ? Cette raison pourrait suffire puisqu'ils ont tous les deux à chaque fois les mêmes calculs à effectuer, et qu'ils doivent aboutir aux mêmes résultats, mais on pourrait aussi y voir que l'une représente le « bon modèle » et que l'autre, celle de Marc bien sûr, présente un modèle moins abouti qu'il conviendra d'abandonner au plus tôt.

QUESTION 5.
Les compétences importantes que les enfants doivent posséder sont les suivantes :

- Savoir décomposer un nombre selon le principe de la numération de position pour appliquer la distributivité de la multiplication sur l'addition ;
- Connaître les produits simples permettant de retrouver tous les termes de la table de multiplication (on peut en doublant certains produits bien connus retrouver des termes moins familiers, ainsi sachant que $3\times9 = 27$ on peut retrouver $6\times9 = 27 + 27 = 54$) ;
- Savoir multiplier par une puissance de 10 (par 10, par 100) ;
- Savoir additionner des nombres est aussi indispensable.

QUESTION 6.
Se reporter à l'annexe 6 (Pour comprendre les mathématiques) :

- L'exercice 1 vise à justifier deux techniques de calcul d'un produit (en ligne et en colonne) en se référant à la présence du découpage du quadrillage correspondant, 27×5.
- L'exercice 2 vise la systématisation de la technique en colonne proposée dans l'exercice 1, en utilisant un tableau de numération. Le quadrillage disparaît, les élèves doivent observer un exemple et « reproduire » cette façon de procéder sur un calcul analogue. Il s'agit d'appliquer ce qui vient d'être présenté, un procédé de multiplication. La méthode pédagogique retenue est donc l'ostension : « Observe et reproduis ! ».
- L'exercice 3 vise à entraîner les élèves dans cette technique.
- L'exercice 4 propose une nouvelle méthode, plus rapide pour ceux qui la maîtriseront, permettant de diminuer la trace écrite grâce au calcul mental. Il s'agit de l'algorithme usuel traditionnel de la multiplication par un nombre d'un chiffre. Voir note 2 en fin de texte.

QUESTION 7.
Le maître décide de modifier l'énoncé de l'exercice 6…
L'exercice tel qu'il est présenté ne correspond pas à une évaluation de la compréhension de l'enchaînement des 5 exercices qui le précèdent. Il s'agit d'un exercice d'entraînement relatif à la reconnaissance des nombres pairs ou impairs. Diverses stratégies peuvent être mises en œuvre, dont le calcul, éventuellement.

Le maître pourrait modifier cet exercice en proposant des nombres écrits sous forme multiplicative pour entraîner les élèves au calcul de produits partiels : ces écritures pourraient être des produits de la table de multiplication, ou bien des produits d'un nombre par 10 ou un multiple de 10. Cela lui permettrait de s'assurer des compétences des élèves à ce sujet.

Le maître décide de faire passer cet exercice avant l'exercice 1 !
L'objectif de cet exercice n°6 pourrait être simplement de s'assurer que les élèves ne confondent pas, dans les écritures de nombres, les deux signes + et $\times$.
Il serait avisé en tout cas de fournir aux élèves (il s'agit du niveau CE1) un moyen simple de faire le tri entre nombres pairs et impairs…
Voir note3, en fin de texte.

Notes des rédacteurs.

Note 1,
relative à la question 1 du second volet : Justification plus détaillée :
- *Annexe 4 (Objectif calcul)* : La première technique (per gelosia) et la troisième (en colonne, proche de la technique experte « à l'Italienne ») sont des méthodes pratiquement abouties ou expertes. Leur apprentissage « forcé » au CE1 ne répondrait pas aux exigences du programme. La seconde technique illustre une étape intermédiaire entre le calcul avec le support d'un quadrillage et un calcul plus abstrait avec des nombres seuls. La quatrième et dernière technique exposée illustre une méthode de calcul en ligne utilisant la décomposition des nombres selon les puissances de 10, la distributivité de la multiplication sur l'addition, les produits d'un multiple de 10 par un entier. Cette méthode de calcul est proche de la seconde, à la représentation près. Les techniques 2 et 4 pourraient constituer un but pour le cycle 2.
- *Annexe 5 (Vivre les mathématiques)* : Sur cette page, on voit comparer trois méthodes : La première s'appuie sur le découpage d'un quadrillage effectivement présent. Le procédé « de Marc » se rapproche de la technique « à l'Italienne » rencontrée précédemment. Dans ce procédé, les produits partiels sont tous écrits, à la différence du procédé « de Sophie », qui propose une technique experte, plus rapide, n'écrivant que le résultat directement, et utilisant donc le principe des retenues. La maîtrise de cette technique, celle des adultes, est un objectif adapté au cycle 3.
- *Annexe 6 (Pour comprendre les mathématiques)* : L'activité 1 vise à justifier un calcul en ligne et un calcul en colonne avec écriture des produits intermédiaires en s'appuyant sur un quadrillage. Ce quadrillage est aussitôt abandonné pour laisser place à la présentation de calculs selon la technique de calcul en colonne avec écriture des produits intermédiaires, puis selon la technique experte, procédés que l'élève doit bien entendu reproduire… Dès l'exercice 4, les objectifs du cycle sont dépassés.
Les fichiers pratiquent fréquemment cette façon de présenter les mathématiques dans laquelle l'élève est spectateur d'une action fictive et doit, sans agir, en lisant une scène, se forger une opinion, s'approprier les connaissances « montrées » ou évoquées : « Observe et fais pareil ! » « Fais comme Marc, ou comme Sophie, et choisis la méthode que tu préfères ! ».

Note 2,
relative à la question 6 du second volet : Le passage de la technique de Marc à celle de Sophie n'est pas aisé : Remarquons par exemple que dans l'exemple donné du calcul de 37×4, l'auteur laisse implicite tout le discours relatif à la numération, à l'ordre de grandeur des unités que l'on manie : « $7\times 4 = 28$, j'écris 8 et je retiens 2 (*2 dizaines !*) , $3\times 4 = 12$ (il s'agit

ici aussi de *dizaines*, car c'est en fait 30×4 que l'on prend en compte) 12 + 2 = 14, j'écris 14 » *1 dans la colonne des centaines et 4 dans celle des dizaines*. Seules les colonnes du tableau permettent de s'y retrouver, repérées par les lettres c, d et u. L'objectif est évidemment de retrouver au plus tôt l'algorithme usuel traditionnellement enseigné. Autre remarque : On constate dans ce dernier exercice l'inversion des termes pris dans le multiplicande et le multiplicateur par rapport aux exemples proposés dans les exercices de la page précédente : erreur ou volonté de retrouver rapidement l'accompagnement oral de ce procédé dans lequel l'expression « *multiplié par* » est remplacée usuellement par le mot « *fois* » ? Cette inversion n'est pas signalée.

Note 3,
relative à la question 7 du second volet : D'une part, cet énoncé (des moutons portant des nombres impairs…) paraît réellement saugrenu, et nous respecterions l'opinion d'un candidat proposant simplement de supprimer cet exercice et de le remplacer par un autre mieux adapté. D'autre part, nous estimons que la dernière question qui est posée aux candidats est inopportune, et ne devrait pas avoir sa place dans cette épreuve : Comment peut-on demander de justifier un choix dont on ne connaît pas la raison ? En fait, il ne s'agit que de deviner une idée qui est passée derrière la tête des auteurs du sujet ! Cela peut paraître assez arbitraire.

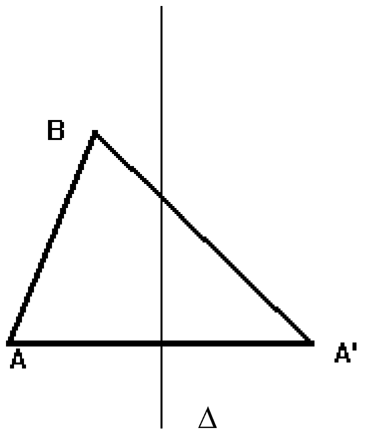
Nancy-metz, reims, StrasbourG

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE N°1

1) Figure1



2) Dans la symétrie par rapport à Δ :
l'image de A est A'
l'image de A' est A
l'image de B est B'

Donc l'image de la droite (AB) est la droite (A'B') et l'image de la droite (A'B) est la droite (AB').
Le point B' se trouve à la fois sur la droite image de (AB) et sur la droite image de (A'B).
Une droite et son image par rapport à un axe se coupent sur l'axe de symétrie ou sont parallèles.

Pour obtenir le point B' avec la seule règle non graduée, il faut utiliser cette propriété en procédant ainsi :
Tracer la droite (AB) qui coupe Δ en I.
Tracer la droite (A'B) qui coupe Δ en J.

Le point B' se trouve à l'intersection des droites (IA') et (AJ) (figure 2)

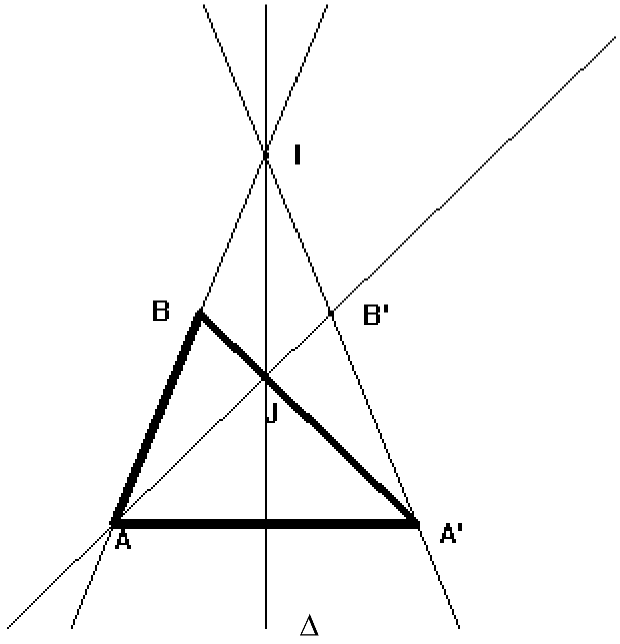


Figure 2

La construction repose sur l'existence des points I et J . Elle sera donc impossible si (AB) est parallèle à Δ ou si (A'B) est parallèle à Δ .
Elle est également impossible si B appartient au segment [AA'], ce qui est exclu par l'énoncé.

EXERCICE N°2

1°) Résolution algébrique du problème

Soit $\overline{19ab}$ l'année de naissance de Pierre, a et b désignant deux chiffres inconnus.
La somme des chiffres de son année de naissance est :
$1 + 9 + a + b = 10 + a + b$

Son âge est $2001 - \overline{19ab} = 2001 - (1900 + 10a + b) = 101 - 10a - b$

On obtient donc l'égalité suivante :
$10 + a + b = 101 - 10a - b$
soit $11a + 2b = 91$ avec $0 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$

En essayant successivement a = 0, 1, 2 ,... jusqu'à 9, on trouve la seule solution :
$a = 7$ et $b = 7$.

L'année de naissance de Pierre est donc1977.
Son âge en 2001 est 24 ans et on a bien $24 = 1 + 9 + 7 + 7$

a) Si l'année de naissance est $\overline{19ab}$

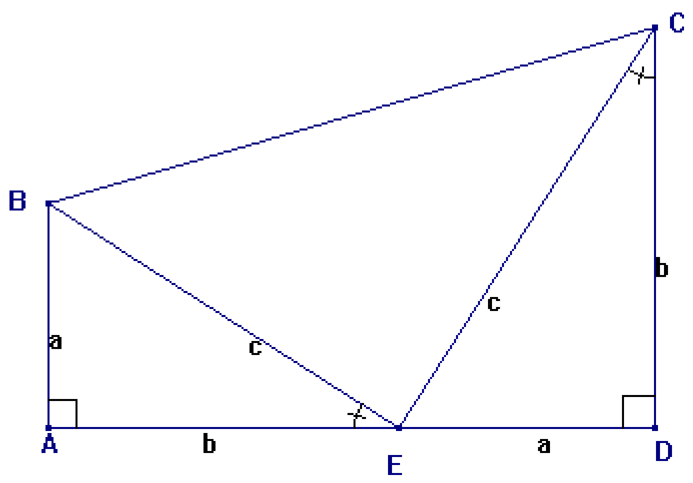
puisque $a \leq 9$ et $b \leq 9$ alors $1 + 9 + a + b \leq 28$
Donc l'âge de Pierre est inférieur ou égal à 28 ans.

b) Sachant cela, un élève de cycle 3 peut procéder par essais plus ou moins organisés et systématiques. Par exemple, il peut noter les essais dans un tableau

Age	Année	Somme
28	1973	20
27	1974	21
……	…….	……

L'élève peut continuer à remplir le tableau pas à pas . A chaque ligne, l'âge diminue d'une unité et la somme augmente d'une unité. Cette remarque peut le conduire à accélérer les essais . Le plus rapide est de raisonner à partir de la première ligne où la différence entre l'âge et la somme est de 8. Pour avoir l'égalité il faut donc diminuer l'âge de la moitié de 8 soit de 4, ce qui augmente la somme d'autant.
D'où le résultat : l'âge est 28 – 4 = 24.

EXERCICE N°3



Les triangles rectangles BAE et EDC sont isométriques car ils possèdent tous deux un angle droit compris entre deux côtés de même longueur.

Ainsi $\widehat{AEB} = \widehat{ECD}$ et $\widehat{ABE} = \widehat{DEC}$
Par ailleurs, dans un triangle rectangle, la somme des deux angles aigus vaut 90°.
Donc $\widehat{ABE} + \widehat{AEB} = \widehat{DEC} + \widehat{AEB} = 90°$.
On en déduit que : $\widehat{BEC} = 180° – (\widehat{DEC} + \widehat{AEB}) = 90°$.

Il résulte de l'isométrie des triangles rectangles précédents que BE = EC = c.
Le triangle BEC est donc rectangle isocèle.

2)On calcule l'aire A du trapèze ABCD.

Premier calcul en appliquant la formule de l'aire du trapèze : produit de la demi - somme des bases par la hauteur

soit: $A = \frac{a+b}{2} x(a+b) = \frac{(a+b)^2}{2}$

Deuxième calcul en considérant le trapèze ABCD comme l'assemblage de trois triangles rectangles ABE, BEC et EDC.

Ainsi $A = \frac{ABxAE}{2} + \frac{BExCE}{2} + \frac{DExDC}{2}$

$$A = \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{ab}{2} = \frac{c^2}{2} + ab$$

3) Il en résulte l'égalité : $\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{c^2}{2} + ab$ ou encore $\frac{a^2+b^2+2ab}{2} = \frac{c^2+2ab}{2}$

D'où en simplifiant $a^2+b^2=c^2$.

On retrouve ainsi le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour mesure a et b et dont l'hypoténuse a pour mesure c

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

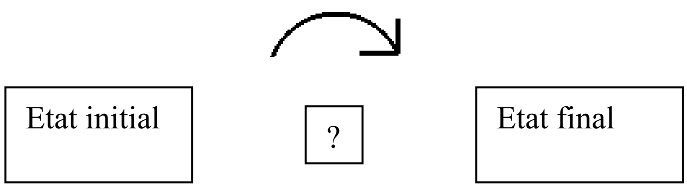
QUESTION 1

Difficultés du problème :

La solution experte de ce problème consiste à effectuer une soustraction. Les difficultés proviennent d'une part du sens de l'opération et d'autre part de la technique opératoire.

Deux difficultés liées au sens de l'opération :

Si on se réfère à la classification des problèmes additifs selon G.Vergnaud[22] il s'agit d'une transformation d'état. On connaît l'état initial et l'état final et il s'agit de trouver la transformation.



[22] Cette classification est reprise dans ERMEL, Apprentissages numériques CP, Hatier, 1994.

Les problèmes de cette classe sont a priori plus difficiles que ceux où l'état initial et la transformation sont donnés, et l'état final cherché. C'est la première difficulté.
En effet, les problèmes de recherche de l'état final sont les plus faciles car dans ce cas le résultat de l'opération est aussi le résultat de la transformation.

L'énoncé comporte des mots inducteurs forts qui insistent sur la nature additive de la transformation :
"le grand-père a donné" "Jean les a ajoutés"
Or l'opération attendue est une soustraction. C'est la deuxième difficulté.

Pour certains élèves, cela induira une addition à trou qui conduira à la solution exacte. Mais les élèves qui cherchent des indices dans le texte sans se représenter les événements seront tentés d'effectuer une addition entre les nombres donnés

Une difficulté liée à la technique opératoire : il s'agit d'une soustraction avec retenue. Elle concerne des nombres assez grands et éloignés ce qui rend difficile une technique de surcomptage ou de comptage en reculant.

QUESTION 2 : procédures
Elève A : Il fait une hypothèse sur le résultat par une évaluation de l'ordre de grandeur (la centaine) et teste son hypothèse par addition. Il ajuste progressivement le nombre en deux essais : 100, puis 110. Ensuite il surcompte (5 petites barres) de 168 à 173 et trouve ainsi le résultat : 110+5

Pour 154- 78 il aurait pu tester 100, cette fois trop grand, puis 90, puis 80, puis 70. Le résultat de l'addition étant 148 il aurait surcompté 6 de 148 à 154 et aurait ainsi trouvé 76.
Autre hypothèse : arrêt des essais à 80. Il obtient 158 (78 + 80), puis il compte à rebours de 4 pour atteindre154. Il obtient le résultat en enlevant 4 à 80 donc 76.

Elève B : Il dessine une plaque de 100, 7 barres de 10 et trois unités pour représenter 173 unités. Il enlève 58 unités. Pour cela, il fait une croix sur 5 dizaines et casse une dizaine (en la barrant) qu'il remplace par 10 unités. Il fait une erreur en faisant une croix sur 9 unités et non huit. Il entoure tous les éléments qui portent une croix (59) et il lui reste la plaque de 100, une barre de 10 et 4 unités mais il écrit le résultat exact :
100 + 10 + 5. Il semble qu'il ait écrit d'abord 100 + 10 + 4 puis que le 4 soit barré et remplacé par 5.

Pour 154 – 78, il aurait dessiné une plaque de 100, 5 barres de 10 et 4 unités. Il aurait dû casser la plaque en dix barres pour mettre une croix sur 7 barres. Il aurait dû aussi casser une barre en dix unités, pour mettre une croix sur 8 unités. En entourant les objets portant une croix, il aurait trouvé 7 barres de 10 et 6 unités .

Elève C : Il fait une addition 58 + 173 sans erreur de calcul.

Si l'opération à faire pour résoudre le problème avait été 154 – 78, il aurait fait :
154 + 78

Elève D : Il fait une addition à trou en posant 58 + ... = 173. Il ajuste les unités en posant 5 car 8+5 = 13, fait cette addition en notant la retenue (1 + 5 = 6). De 6 dizaines pour aller à 7 dizaines il faut une dizaine qu'il pose. Et enfin, il pose le 1 pour la centaine. Il obtient ainsi 115.

Si l'opération à faire pour résoudre le problème avait été 154 – 78 il aurait posé :
78 + ...= 154. En ajustant les unités, il aurait trouvé 6 car 8 + 6 = 14 . Il aurait fait cette addition en ajoutant la retenue (1 + 7 = 8). Il aurait ensuite ajusté les dizaines en cherchant le nombre pour aller de 8 à 15. Il aurait trouvé 7 .

<u>Elève E</u> : Il choisit la bonne opération, la soustraction.
Il effectue cette opération en utilisant ses connaissances en numération : parmi les 7 dizaines, il en casse une pour obtenir 6 dizaines et 13 unités.
Le calcul des unités donne 13 – 8 = 5 unités et celui des dizaines donne 6 – 5 = 1 dizaine. Il recopie la centaine restante.

Pour effectuer 154 – 78, il devrait casser une dizaine parmi les 5 pour avoir 4 dizaines et 14 unités. Le calcul des unités donne 14 – 8 = 6 unités. Comme il n'a que 4 dizaines restantes, il devrait casser la centaine pour n'avoir que 14 dizaines, dont le calcul donne 14 – 7 = 7 dizaines.

3) <u>Elève F</u> : on peut interpréter son résultat de deux façons :
- soit il oublie la retenue dans la soustraction par compensation
- soit il retranche en colonne toujours le plus petit nombre du plus grand nombre :
8 – 3 = 5 et 7– 5 = 2
Remarque : Les deux procédures donnent le même résultat chaque fois que l'on est en présence de deux nombres dont la différence est 5.
(ici 8 – 3 = 13 – 8 = 5 et en général a - b = 10 + b – a soit a - b = 5)

Dans le cas de 154 – 78, l'oubli des deux retenues donne 186, l'oubli de la seule retenue liée aux unités donne 86.
L'autre procédure donne 124.

SECOND VOLET (8 POINTS)

1°) A PROPOS DES ACTIVITÉS PRÉPARATOIRES :

1-1)
Construction de la chaîne des nombres

Compétence numérique : L'élève doit savoir écrire soixante dix nombres consécutifs à partir de n'importe quel nombre de départ, sans en oublier. Il doit pouvoir passer à la dizaine supérieure, puis à la centaine supérieure.
Compétence non numérique : L'élève doit comprendre le sens dans lequel il doit tourner pour remplir la spirale sans sauter une place

A la seule lecture du livre du maître concernant cette activité, on ne peut repérer que les deux intentions suivantes :
- Associer la numération orale à la numération écrite des nombres jusqu'à 999.
- Apprendre aux élèves à construire la suite des nombres en ajoutant une unité à chaque fois.

Mais une autre intention possible, non signalée dans le livre du maître, serait de conduire les élèves à remarquer que les nombres placés sur un même rayon de la spirale se succèdent de 10 en 10. Cette remarque sera très utile pour la réussite de l'activité suivante.

1-2)
Repérage sur la chaîne des nombres

Pour placer les nombres 640, 650, 660 et 670 l'élève peut :
- soit compter à partir de 630, en pointant les plots de un en un.
- soit écrire ces nombres sur les plots successifs du même rayon de la spirale que le nombre 630.

Pour cela, il devra avoir remarqué, lors des remplissages de spirales précédentes, que tous les nombres qui se succèdent de 10 en 10 sont sur le même rayon.

Pour placer les nombres 645, 655, 665 l'élève peut utiliser les deux mêmes stratégies :
- soit compter 5 plots à partir de 640, puis 650, etc...
- soit placer ainsi 645, puis remarquer que 655 et 665 sont les deux nombres successifs sur le même rayon de la spirale.
- soit remarquer tout de suite que tous les nombres terminés par 5 sont sur le rayon opposé à celui qui porte les nombres se finissant par 0.

Par ailleurs 646 se place juste après 645, 661 se place juste après 660 et 656 se place juste après 655.

Pour les nombres 649, 659 et 669, on peut les placer :
- soit respectivement avant 650,660 et 670.

- soit placer ainsi 649 et ensuite les deux autres sur le même rayon.

1-3
Ecriture des nombres dictés sur la droite numérique

La tâche de l'élève comporte plusieurs composantes à exécuter simultanément :
- écrire un nombre dicté,
- encadrer ce nombre entre deux nombres consécutifs de dizaines,
- trouver le rectangle convenable dans la représentation de la droite.

Une première difficulté est le passage de la numération orale à la numération écrite. Une deuxième difficulté résultera de l'ordre dans lequel le maître va dicter les nombres. Selon le cas, l'élève devra faire plus ou moins de va et vient de gauche à droite.
Une troisième difficulté provient de la forme orale de l'activité. En effet, si un élève fait une erreur sur la place d'un nombre proposé, il devra la corriger tout en gardant en mémoire les autres nombres que le maître continue de dicter.

2°) A PROPOS DE L'ACTIVITÉ DE RECHERCHE :

2-1)
Les enfants doivent transférer le sens de rotation sur la spirale (sens inverse des aiguilles de la montre) en un sens de translation sur la demi-droite (de la gauche vers la droite, sens de la lecture et de l'écriture). Il faut qu'ils imaginent un fil enroulé qui se déroule.
Sur la spirale, ils ont dix demi-droites graduées de dix en dix qui vont se superposer pour devenir une seule demi-droite graduée. Pour cela, il faut que les neuf nombres qui se déroulent en un tour sur la spirale viennent se placer entre deux plots consécutifs sur une demi-droite.

2-2)

Tâche de l'élève :
Dans un premier temps, l'élève doit ranger cinq nombres écrits sur un support fixe. Comme ils ne sont pas sur des cartons mobiles, l'élève doit s'organiser pour ne pas en oublier. Il doit faire deux sous-ensembles, l'un avec 5 centaines, l'autre avec 4 centaines. Dans les deux cas , il doit ensuite comparer les chiffres des dizaines.
Dans un deuxième temps, l'élève doit placer ces nombres sur la droite.
Puis l'élève doit trouver le nombre juste avant et le nombre juste après 862.

2-3)
La droite graduée est introduite car elle est en continuité avec la bande numérique manipulée depuis le CP. A la différence de la bande numérique, la graduation permet des « zoom » pour intercaler un nombre entre deux autres donc elle pourra être utilisée avec les décimaux et elle est directement liée à la mesure des longueurs.

3°) A PROPOS DES EXERCICES D'APPLICATION :

3-1)

Savoir évalué
Dans les trois exercices, il s'agit de comparer des nombres de trois chiffres en comparant les centaines, si elles sont égales, les dizaines, si elles sont égales, les unités.
Exercice 1 : Déterminer le plus petit nombre et le plus grand dans une liste de cinq nombres de trois chiffres.
Exercice 2 : Comparer deux nombres et utiliser les signes < et >.
Exercice 3 : Ranger six nombres donnés sous forme fixe (ce ne sont pas des cartons mobiles à classer), ce qui suppose une méthode pour ne pas en oublier (rayer ou marquer le plus petit écrit, puis le suivant ...).

3-2)
Variables :
Pour tous les exercices :
1- La taille des nombres
2- La distance entre les nombres donnés : soit on peut les ordonner en récitant la suite des nombres, soit il faut appliquer une technique de comparaison en considérant tour à tour les chiffres : centaines, puis dizaines, puis unités.
3- L'écriture des nombres qui peuvent être sous forme usuelle comme ici, mais pourraient être sous forme de sommes. Ce n'est pas la même chose de demander de comparer 918 et 845 ou bien 900 + 18 avec 800 + 45 (on peut alors penser à 800 + 100 + 18).
Pour les exercices 1 et 3:
4- Le nombre de nombres en jeu en même temps et la possibilité ou non de faire des sous-ensembles de nombres voisins (exemple 204 et 205 ou 221 et 228).
5- Le support des nombres : écritures fixes ou cartons mobiles.

3-3 Autres formes d'exercice :
La comparaison peut être l'objet d'un problème au sens classique, c'est à dire il peut y avoir un habillage en termes de gains à comparer ou à ranger du plus gros au plus petit.
Comme on l'a dit plus haut certains nombres peuvent être donnés avec une autre écriture que l'écriture usuelle, ou sur des cartons mobiles.
Les nombres pourraient être sur des cartons retournés face cachée (un chiffre écrit par carton) et il faudrait répondre à la question de l'ordre en retournant le moins de cartons possible. Par exemple, pour savoir quel est le plus grand entre 918 et 845, il suffit de retourner les deux chiffres des centaines, on n'a pas besoin de connaître les autres chiffres. Pour 707 et 712, il faut retourner les centaines et les dizaines.

Réunion

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

EXERCICE 1

QUESTION 1
a)
Le périmètre de la base du cylindre A a une mesure égale à 30 centimètres.
Si les deux bords de la feuille sont joints sans superposition, le périmètre de la base du cylindre A correspond à la longueur de la feuille de carton, donc à 30 cm.

b)
La mesure R du rayon de la base du cylindre A, exprimée en centimètres, est définie par la relation : $2\pi R = 30$. D'où $R = \frac{15}{\pi}$ (environ 4,7 centimètres).
Le volume V_a de ce cylindre, exprimé en cm^3, est celui d'un cylindre de 21 cm de hauteur et de rayon R : $V_a = \pi \times R^2 \times 21$
$V_a = 21\ \pi \times \frac{225}{\pi^2}$. Une mesure approchée, à un centimètre cube près, du volume du cylindre A est : $V_a \approx 1504$.

QUESTION 2
La mesure R' du rayon de la base du cylindre B, exprimée en centimètres, est définie par la relation : $2\pi R' = 21$.
$R' = \frac{10,5}{\pi}$, ce qui correspond environ à 3,3 centimètres.
Le volume V_b de ce cylindre, exprimé en cm^3, est celui d'un cylindre de 30 cm de hauteur et de rayon R', $V_b = \pi \times R'^2 \times 30$. On obtient : $V_b \approx 1052,8$.
Une mesure approchée, à un centimètre cube près par défaut, du volume du cylindre B est égale à 1052, et à 1053, à un centimètre cube près par excès.

Les valeurs exactes des volumes des deux cylindres sont :
$V_a = \frac{21 \times 30^2}{4\pi}$ et $V_b = \frac{30 \times 21^2}{4\pi}$
Le cylindre A a un plus grand volume que le cylindre B.

QUESTION 3

L'aire latérale désigne l'aire de la surface rectangulaire roulée, la réponse est donc :
Les deux cylindres ont la même aire latérale, correspondant à l'aire du rectangle :
La mesure de l'aire du rectangle, exprimée en cm^2, est égale à 21×30, soit 630 cm^2 .
Note : Les deux cylindres ont des bases différentes (ayant pour rayons R et R' respectivement), la même aire latérale, et des volumes différents : le volume est indépendant de l'aire latérale.

EXERCICE 2

PARTIE A

QUESTION 1
1 m^3 = 1000 litres.

Diminuer de 20% revient à multiplier par $\frac{80}{100}$, donc par 0,8.

Selon la formule donnée, le volume V d'eau, exprimé en litres, est égal à :

$V = 1 \times 0,3 \times 0,45 \times \frac{80}{100} \times 1000$

V = 108 litres.

QUESTION 2
a)
On suppose que le nombre de gouttes de médicament est proportionnel à la quantité d'eau contenue dans l'aquarium. Pour 10 litres d'eau on verse 5 gouttes de produit le premier jour, donc pour 108 litres d'eau, on versera : $\frac{5 \times 108}{10} = 54$ gouttes.

Réponse : Le premier jour, pour 108 litres, on doit verser 54 gouttes.

b)
Le second et le troisième jour on verse une demi-dose, c'est à dire la moitié de ce qui a été versé le premier jour. En tout on verse donc 54 + 27 + 27 = 108 gouttes.
Réponse : Sur l'ensemble des trois jours, on versera 108 gouttes.

QUESTION 3
1 ml de produit correspond à 20 gouttes. En admettant que la quantité de produit est proportionnelle au nombre de gouttes, 108 gouttes c'est 5,4 fois plus que 20 gouttes.

$\frac{108}{20} = 5,4$ La quantité totale versée est donc égale à 5,4 ml.

PARTIE B

QUESTION 1

1 dm^3 = 1 litre. Soit L la mesure en décimètres de la longueur de l'aquarium, et l la mesure en décimètres de la largeur de l'aquarium, la hauteur d'eau est égale à 4,5 dm, et le volume en litres de l'eau contenue est donné par la formule :

$$V = L \times l \times 4{,}5 \times \frac{80}{100}$$

$$V = 3{,}6 \times L \times l$$

Le nombre de gouttes versées le premier jour est alors égal à $5 \times \frac{V}{10}$,

soit à $\frac{5 \times 3{,}6 \times L \times l}{10}$.

Après simplification : Le nombre de gouttes est égal à $1{,}8 \times L \times l$.

QUESTION 2.

largeur \ longueur	50 cm	75 cm	100 cm	150 cm
30 cm	27 gouttes	40 gouttes (ou 41 gouttes)	54 gouttes	81 gouttes
40 cm	36 gouttes	54 gouttes	72 gouttes	108 gouttes

: 2

: 2

$\times \frac{4}{3}$

×3

PARTIE C

QUESTION 1.

Sur le graphique, pour une longueur égale à 120 cm, pour une largeur égale à 40 cm, on lit : le nombre de gouttes à verser le premier jour est égal à 86.

QUESTION 2.

Sur le graphique, pour une longueur égale à 90 cm, et pour une largeur égale à 30 cm, on lit : le nombre de gouttes à verser le premier jour est égal à 48, ou à 49.
Note : Un calcul rapide donne 48,6.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES.

QUESTION 1

Analyse de la technique de Mathieu
Mathieu a disposé correctement sa soustraction. Il commence par retrancher les unités entre elles : « 7 pour aller à 5 (ou 5 moins 7), je ne peux pas, donc je fais 7 pour aller à 15 (ou 15 moins 7 ». Il écrit un chiffre 1, entouré, correspondant à la dizaine qu'il a ajoutée aux 5 unités, écrit la différence 15 – 7 = 8 dans la colonne des unités. Cette dizaine est ensuite prélevée aux 4 dizaines de 45 : Mathieu raye le chiffre 4 et écrit 3 juste au dessus, dans la colonne des dizaines : Il a « cassé » les 4 dizaines, pour y prendre 10 unités qu'il a jointes aux 5 unités de 45. Il peut alors terminer son opération sur les dizaines : 3 – 2 = 1. Son opération est juste, cette technique est correcte.
En fin de cycle 2, la seule exigence des programmes officiels relative à la maîtrise d'une technique opératoire concerne l'addition : Pour les autres opérations, on attend que les élèves *aient effectué une approche des techniques* de la soustraction et *de la multiplication*. On peut donc considérer que la technique de soustraction de Mathieu peut constituer une étape dans la progression vers l'algorithme de la soustraction.
Avantages : Cette technique est correcte, elle est d'ailleurs proposée par les auteurs de divers manuels scolaires. Elle offre l'avantage évident d'être chargée de sens, de pouvoir être illustrée à l'aide d'un matériel.
Inconvénients : Cette technique offre par contre le désavantage certain de devoir être abandonnée par la suite pour être remplacée par la technique usuelle utilisant les retenues. On imagine mal en effet son utilisation intégrée dans la technique opératoire de la division. Elle devient vite incommode dès lors que les nombres dépassent 99 et qu'il y a des retenues : Par exemple, le calcul de 1203 – 578 fait apparaître les inconvénients qu'elle présente. De plus, pour certains enfants, la connaissance des deux techniques pourra être une source de confusion et d'erreurs.

QUESTION 2.

Description de la technique de Nicolas :
Nicolas a disposé correctement sa soustraction. Il calcule les écarts entre les chiffres des unités, puis entre les chiffres des dizaines, indépendamment de leur position dans l'opération : « 7 – 5 = 2 pour les unités, et 4 – 2 = 2 pour les dizaines ».
Cette procédure s'avère fausse dès lors qu'il y a une retenue.

Description de la technique de Gaëlle :
Gaëlle a disposé correctement sa soustraction. Elle indique également par les lettres d et u ce que représentent les colonnes des chiffres. Gaëlle effectue ensuite une addition au lieu d'une

soustraction, en commettant une erreur de retenue. Gaëlle additionne les chiffres des unités : « 5 + 7 = 12 », écrit 2 dans la colonne des unités et la retenue (le chiffre 1 entouré) dans la colonne des dizaines, puis additionne les chiffres des dizaines « 4 + 2 = 6 » sans tenir compte de le retenue.
L'erreur principale tient à la confusion entre addition et soustraction.

Description de la technique d' Olivier :
Olivier a disposé correctement sa soustraction. La présence d'une retenue près du chiffre 5 laisse penser qu'il a essayé de commencer à faire la soustraction : « 7 pour aller à 15, ou 15 moins 7… ». Comme résultat, Olivier propose 27 : Soit par méconnaissance ou ignorance de la différence 15 – 7, soit qu'il ait été dépassé par la tâche, Olivier propose un résultat qui peut provenir soit d'une simple copie du nombre à retrancher, soit de l'erreur 15 – 7 = 7 suivie de l'omission de la retenue et du calcul 4 – 2 = 2.

Description de la technique de Clarisse :
Clarisse a disposé en colonnes 27 sous 45, mais n'écrit pas le chiffre moins de la soustraction. Elle calcule probablement la somme des unités « 5 + 7 = 12 », écrit le chiffre 1 dans la colonne des unités et pose le chiffre 2 en retenue dans la colonne des dizaines ! Elle termine en additionnant les dizaines :

« 4 + 2 + 2 (de retenue) = 8 ».

Clarisse confond donc addition et soustraction, inverse les chiffres (dizaines et unités) dans cette technique, et n'exerce pas de contrôle sur son résultat.

SECOND VOLET (8 POINTS)

1°). ANALYSE DU DOCUMENT B

a. Rappelons que le terme de "surface" est un terme géométrique : on appelle surface un ensemble de points et non l'aire de cet ensemble de points. Le titre de la fiche "comparer des surfaces" est ambigu dans la mesure où le choix du critère de comparaison n'est pas explicité. La comparaison des surfaces peut en effet porter sur leur forme géométrique, sur leur périmètre, sur leur aire. Il s'agit d'une fiche issue d'un manuel de CE2, les élèves de ce niveau n'ont pas encore rencontré la notion d'aire d'une surface, il est donc vraisemblable qu'ils s'appuient sur l'un des deux premiers critères cités pour établir la comparaison.

Si on compare les rectangles en fonction de leur aire on obtient l'ordre : d, a, c, b.
Si on compare les rectangles en fonction de leur périmètre, les rectangles b et c ont le même périmètre, on obtient l'ordre : d, a, b (ou c).
On pourrait également comparer ces rectangles en fonction de la longueur de leur plus grand côté : a et d ont leur plus grand côté de même longueur, on obtient l'ordre : a (ou d), b, c.
On pourrait comparer les largeurs des rectangles, a et c ont même largeur, on obtient l'ordre : d, a (ou c), b.

b. Si la procédure utilisant le quadrillage est bloquée par le professeur, les élèves peuvent comparer les aires des différentes surfaces de la page par superposition avec ou sans découpage et recollement.

c. L'utilisation du quadrillage remplace la comparaison des aires par la comparaison des nombres qui les mesurent, une unité ayant été choisie. Le fait d'introduire la notion d'aire en utilisant les quadrillages risque de conduire les élèves à ne pas distinguer la grandeur "aire" et sa mesure. Or les élèves ont déjà rencontré la notion de périmètre d'une figure plane et ont donc déjà eu l'occasion d'associer un nombre à une figure, il se peut qu'ils risquent de confondre aire et périmètre. De plus, dans chacun des cas, il s'agit de compter des "carreaux" avec toute l'ambiguïté que le terme "carreau" comporte puisque parfois le "carreau" désigne une unité de longueur, et parfois une unité d'aire.,

2°) ANALYSE DES DOCUMENTS C ET D.

a. Une réponse acceptable de la part des candidats pourrait être la suivante :
L'aire est une grandeur, la mesure de l'aire est un couple constitué d'un nombre réel positif, et d'une unité.

Donnons quelques compléments d'information :
D'un point de vue mathématique, l'aire est une classe d'équivalence de surfaces pour une certaine relation d'équivalence "avoir la même aire que", définie de la façon suivante : une surface S a même aire qu'une surface S', si on peut rendre S st S' superposables après découpage et recollement sans trou ni chevauchement. On peut définir alors des applications

de cet ensemble quotient de grandeurs dans l'ensemble des nombres réels, qui soient positives, additives, et monotones. Chacune d'elles est parfaitement déterminée par le choix d'une unité. De telles applications portent le nom de "mesures". Une unité u étant choisie, à une surface plane déterminée S, on peut donc associer un nombre réel positif qui est l'image de son aire par l'application mesure associée à cette unité u. On désigne usuellement ce nombre par l'expression : "mesure de l'aire de la surface en unité u".
La notion de grandeur est une notion délicate. Pour construire cette notion avec des élèves, il semble nécessaire de proposer diverses activités ne faisant pas intervenir les nombres dans lesquelles les élèves sont conduits à comparer l'aire de diverses surfaces planes par des procédés non numériques de superposition, de découpage, de recollement, de manière à comprendre que des surfaces de formes différentes peuvent avoir la même aire, que des surfaces de périmètres différents peuvent avoir la même aire, que les variations de l'aire et du périmètre d'une surface ne sont pas liées, qu'il est possible d'accroître infiniment le périmètre sans modifier l'aire, etc.

b. Il est difficile de deviner ici l'attente des auteurs du sujet.
Dans le document C, il y a confusion entre "aire" et "mesure de l'étendue", car, comme nous l'avons déjà dit, l'aire est une grandeur tandis que la mesure de l'aire est un couple (nombre réel positif, unité). Par ailleurs le terme "étendue" ne relève pas du champ mathématique, c'est un terme attaché à des pratiques sociales (étendue d'un domaine agricole, étendue d'un désastre, etc.). L'utilisation de ce terme ajoute à la confusion des concepts.
En langage usuel, on pourrait sans doute dire qu'un champ rectangulaire de 1000m sur 10 m est plus étendu qu'un champ carré de 100 m de côté, parce qu'il est plus "étiré", alors que ces deux champs ont la même aire.

c. Dans le document C, l'objectif principal semble être l'introduction de la notion d'unité d'aire (la maille du quadrillage) pour pouvoir comparer les aires de diverses surfaces dessinées sur quadrillage en utilisant le dénombrement. Dans le document D, l'objectif semble être le passage de la détermination de l'aire d'une surface par dénombrement de carreaux à sa détermination par le calcul en utilisant les formules de calcul de l'aire du rectangle et du carré.

d. Il semble prématuré de faire apprendre et utiliser les formules de calcul de l'aire du rectangle et du carré au CM1, dans la mesure où il est plus important pour les élèves de construire de manière approfondie la notion d'aire que d'appliquer des formules de calcul.
On sait que de très nombreux élèves confondent encore en sixième les notions d'aire et de périmètre ; il est vraisemblable que le recours au calcul trop rapide contribue à cette confusion.

3°) ANALYSE DU DOCUMENT E.

a. L'objectif visé au travers du document E est la mise en place de la distinction entre aire et périmètre et l'absence de relation entre leurs variations. Plus précisément les auteurs du manuel souhaitent que les élèves prennent conscience que des rectangles peuvent avoir même périmètre et des formes et des aires différentes, et que des rectangles peuvent avoir même aire et des formes et des périmètres différents.

b. **QUESTION 1**

Nous avons choisi des valeurs entières pour les dimensions du rectangle car il est vraisemblable que les élèves de CM1 proposent de telles valeurs, mais il est bien sûr évident que les dimensions du rectangle peuvent être des nombres réels positifs non entiers (4ème ligne du tableau)

rectangle	longueur en cm	largeur en cm	périmètre en cm	aire en cm^2
A	11	1	24	11
B	8	4	24	32
C	6	6	24	36
D	7,5	4,5	24	33,75

QUESTION 2

rectangle	longueur en cm	largeur en cm	périmètre en cm	aire en cm^2
E	12	2	28	24
F	8	3	22	24
G	6	4	20	24
H	10	2,4	24,8	24

(figures jointes en annexe)

4°) PROLONGEMENTS POSSIBLES.

Dans ces documents, il semble qu'il manque un travail important de comparaison d'aire de surfaces planes sans support quadrillé, comme il a déjà été dit précédemment. De ce fait, l'équivalence de l'aire de deux surfaces par découpage, déplacement, recollement n'est pas travaillée, or cette propriété est très utile pour pouvoir déterminer l'aire de nombreuses surfaces et pour établir un certain nombre de formules de calcul d'aire.
Par ailleurs, il n'est pas fait allusion au fait que l'aire d'une surface est mesurée par un nombre qui dépend de l'unité choisie. Aussi si l'on change d'unité, la mesure de l'aire d'une surface est modifiée alors que l'aire ne l'est pas.
Ces différents points sont fondamentaux à travailler avant de passer à la détermination de l'aire de surfaces diverses par l'application de formules et le calcul.

ANNEXE : FIGURES DE LA QUESTION B CONCERANT LE DOCUMENT E.

Figure1, trois rectangles ayant un périmètre égal à 24 cm :

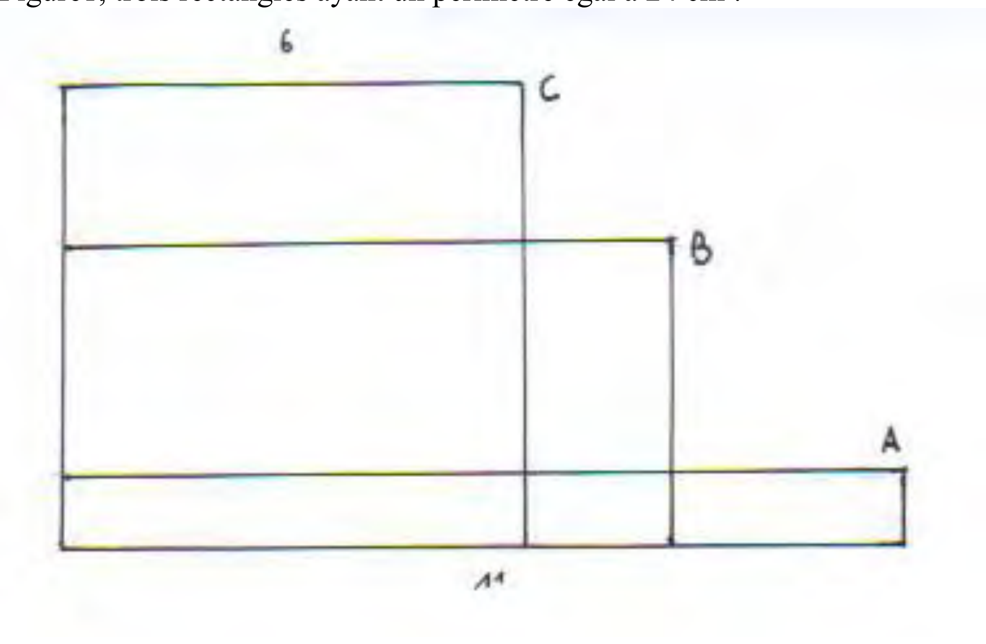
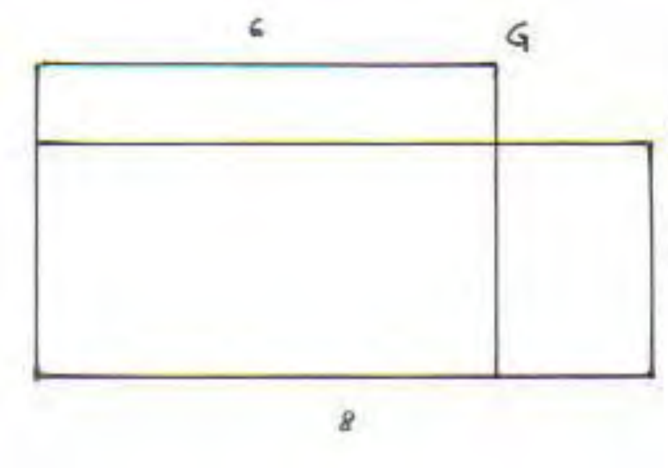


Figure 2, deux rectangles ayant une aire mesurant 24 cm^2.



ROUEN 1

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

QUESTION 1

a)

Le rectangle a comme mesure de longueur 23 cm et comme mesure de largeur 9 cm.
Comme 23 = 9 x 2 + 5 , on peut placer 2 carrés A de mesure de côté 9 cm.
On s'intéresse au rectangle restant de mesures 9 cm sur 5 cm.
9 = 5 x 1 + 4 : on peut encore placer un carré B de 5 cm de côté.
Reste un rectangle de mesures 5 cm sur 4 cm.
5 = 4 x 1 + 1 : on peut encore placer un carré C de 4 cm .
Reste un rectangle de 4 cm sur 1 cm, qu'on peut partager en 4 carrés D de côté 1 cm.
Conclusion : le rectangle de départ peut être partagé en 2 carrés A (9 cm), un carré B (5 cm), un carré C (4 cm) et 4 carrés D (1 cm).

b)

Compte tenu des nombres de carrés A, B C et D :

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{5}} = 2+\frac{5}{9} = \frac{23}{9}$$

QUESTION 2

a)

Nous laissons au lecteur le soin de faire le découpage lui même et de vérifier grâce au tableau suivant.

b)

Type de carré	A	B	C	D	E
Dimension du côté du carré	19	7	5	2	1
Nombre de carrés	1	2	1	2	2

c)

$a_1 = 1$ $\quad$ $a_2 = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad$ $a_3 = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}} = \frac{4}{3}$

$a_4 = 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}} = 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{2}{3}} = 1+\dfrac{3}{8} = \dfrac{11}{8}$

$a_5 = 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}} = 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{5}}} = 1+\dfrac{1}{2+\dfrac{5}{7}} = 1+\dfrac{7}{19} = \dfrac{26}{19}$

QUESTION 3

a)

La question 3 généralise les calculs faits précédemment :
n_1 correspond au plus grand nombre de fois où d_1 est contenu dans d_0 : c'est donc exactement le quotient entier de d_0 par d_1.
De plus on a la propriété du reste : $d_0 - d_1 \times n_1 < d_1$
Après le premier placement de carrés de côté d_1, il reste donc un rectangle de longueur d_1 et de largeur $d_0 - d_1 \times n_1$
La dimension d_2 est donc $d_0 - d_1 \times n_1$.

b)

On recommence le processus dans ce rectangle R_1 :
on trace les carrés de côté $d_2 = d_0 - d_1 \times n_1$, on en trouve n_2 ;
il reste alors un rectangle R_2 de longueur d_2 et de largeur $d_1 - d_2 \times n_2$, soit d_3 ;
ce qui se résume par $d_1 = d_2 \times n_2 + d_3$

En résumé
n_1 est le quotient entier de d_0 par d_1 ; d_2 est le reste de cette division euclidienne ;
n_2 est le quotient entier de d_1 par d_2 ; d_3 est le reste de cette division euclidienne ;
n_3 est le quotient entier de d_2 par d_3 ; d_4 est le reste de cette division euclidienne ; etc.

c)

1) Application au rectangle 146 sur 113.

146 = 113 x 1 + 33	ce qui peut s'écrire comme
113 = 33 x 3 + 14	divisions euclidiennes successives posées
33 = 14 x 2 + 5	
14 = 5 x 2 + 4	
5 = 4 x 1 + 1	
4 = 1 x 4	

D'où

Type de carré	A	B	C	D	E	F
Dimension du côté du carré	113	33	14	5	4	1
Nombre de carrés	1	3	2	2	1	4

2)

$$a_4 = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{5}} = 1+\frac{5}{17} = \frac{22}{17}$$

3)

La calculatrice donne pour $\frac{22}{17}-\frac{146}{113}$ à peu près 0,00208.

D'où un encadrement à 10^{-3} près : $0,002 < \frac{22}{17}-\frac{146}{113} < 0,003$.

4)

La question, assez floue au départ, engage dans le calcul approché des nombres a_n.

$a_1 = 1$ $\quad a_2 = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,333$ $\quad a_3 = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}} = 1+\frac{2}{7} = \frac{9}{7} \approx 1,286$

$a_4 \approx 1,294$ $\quad a_5 = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}} = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{7}} = 1+\frac{7}{24} = \frac{31}{24} \approx 1,292$

Or une valeur approchée par défaut calculée à la calculatrice de $\frac{146}{113}$ est 1,292 .

Il se révèle donc que les fractions a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5… donnent des approximations de plus en plus précises[23] de $\frac{146}{113}$.

$$a_6 = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}} = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{5}}}} = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{5}{14}}} = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{14}{33}} = 1+\frac{33}{113} = \frac{146}{113}$$

Et a_6 est exactement la fraction cherchée.
Ce qui correspond bien à la fin du découpage en carrés du rectangle de départ .

[23] Cette question met en jeu la notion de « fractions réduites ».

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

QUESTION 1
Sans autre indication, plusieurs réponses sont possibles selon les hypothèses faites sur les notions antérieures traitées par l'enseignante.

Première hypothèse : l'enseignante a fait travailler les élèves sur des problèmes multiplicatifs et entraîné sur la technique de la multiplication par un nombre de un chiffre.
L'objectif poursuivi peut alors être de tester l'aptitude des élèves à résoudre un problème multiplicatif mettant en jeu un produit de deux nombres de deux chiffres, en leur donnant un moyen de contrôle sur leur réponse numérique.

Deuxième hypothèse : l'enseignante a fait travailler les élèves sur des problèmes multiplicatifs et entraîné au calcul réfléchi multiplicatif.
L'objectif poursuivi peut alors être de tester la reconnaissance d'un problème multiplicatif et d'évaluer la capacité des élèves à utiliser des indices numériques pour discriminer les réponses :
- l'ordre de grandeur du résultat : 15 x 17 c'est plus que 10 x 17 donc que 170 : la réponse au problème 1 est donc 255 ;
- le chiffre des unités du produit :15 x 17 se termine par 5, donc c'est 255.

Remarque : la proposition de l'enseignante peut aussi conduire à des stratégies d'évitement : l'élève pouvait résoudre le problème en choisissant la multiplication parce que ni une addition, ni une soustraction (15+17 et 12+14) combinant les nombres de l'énoncé ne fournit les nombres résultats.
Cet effet n'est bien sûr pas un objectif raisonnable.

QUESTION 2
L'analyse des productions des élèves essaie de tenir compte de la variété des situations possibles.

JEAN CHRISTOPHE :
Il pense d'abord que la multiplication lui donnera la réponse (il reconnaît donc des problèmes multiplicatifs), mais la technique mal maîtrisée le fait douter.
Il essaie alors l'addition sans plus de succès.
Il prend alors le problème à l'envers et cherche comment on peut obtenir 255.
Il abandonne et se consacre à l'autre problème.

Etude de “ sa ” technique de calcul
Il traite séparément unités et dizaines. Il multiplie les deux chiffres des unités, puis ceux des dizaines, soit en en additionnant la retenue au produit des chiffres des dizaines, soit en additionnant la retenue, avant de faire le produit, à l'un des chiffres de dizaines.
En fait, il calcule 17 x 15 comme (7 x 5) + (10 x 1), il étend peut-être de façon erronée la technique de multiplication par un nombre à un chiffre à celle par un nombre à deux chiffres.
Pour le problème 2, il fait fonctionner la même technique 12 x 14 = (2 x 4) + (10 x 1) : c'est l'exemple même d'un théorème en acte (concept introduit par G.VERGNAUD).

Ses procédures ne peuvent aboutir.

EMMANUEL :
Il est persuadé que la multiplication lui donnera le résultat : il a reconnu deux problèmes multiplicatifs.
Il sait que la technique opératoire posée prend ici deux lignes, et il rectifie son calcul en fonction du résultat à atteindre : correction de 1 x 14 en 10 x 14 pour la première opération. Ce calcul de la seconde ligne est bien intégré lors de la seconde multiplication. Le résultat donné par le maître lui permet de rectifier une erreur de calcul (additive 7+3 ou méconnaissance du produit 7 x 5) pour 15 x 7.

La procédure choisie est correcte, la rectification de son exécution aussi.

VICTOR :
Il a reconnu deux problèmes multiplicatifs : il calcule 17 x 15 sans l'écrire mais en travaillant sur la décomposition 17 x 15 = 17 x 10 + 17 x 5.
Il calcule 14 x 12 sans l'écrire en partant de 14 x 10, puis complète par sauts additifs réitérés de 14.

La procédure choisie et son exécution sont correctes.

EMILIE :
Elle s'approprie progressivement la situation comme le montre son début de dessin, reconnaît des problèmes multiplicatifs et essaie d'étendre la technique de la multiplication par un nombre d'un chiffre. L'échec la décide à traiter le problème en restant relativement proche du texte : addition réitérée 17 fois, sans faire de paquet, de 15.
Devant l'efficacité de cette procédure, elle l'applique aussi au problème 2.

La procédure choisie et son exécution sont correctes.

3)
Emilie n'est pas encore prête à accélérer ses additions en prenant l'initiative de groupements : par exemple ajouter 8 paquets de 30 par exemple plutôt que d'écrire 16 fois 15.
Elle n'est donc pas sensible, au contraire de Victor, à l'intérêt du groupement par 10 qui donne presque directement la réponse.
Elle a donc plusieurs connaissances à acquérir :
- savoir qu'il est possible de réduire le nombre d'additions en groupant des termes
- savoir que le groupement par dix est intéressant pour le calcul,
- et enfin savoir que 15 x 17 se calcule comme 17 x 15.

SECOND VOLET (8 POINTS)

QUESTION 1
Nous laissons au lecteur le soin de reproduire seul la figure. Si problème, il peut se laisser guider par les étapes de construction ci dessous.

QUESTION 2
Remarque : ***la question est ambiguë et peut donner lieu à des réponses très différentes car il n'est pas précisé à quel public s'adresse la liste des instructions : au correcteur ? à un élève de CM ?***

Nous faisons le choix de donner un programme de construction accessible à un élève de CM.

Figurent en italique les instructions déjà données.

1 *Trace une droite puis marque deux points A et B sur cette droite tels que AB=2,5 cm.*
2 Trace un cercle de centre A passant par B (ou de rayon 2,5 cm).
3 Trace un cercle de centre B passant par A (ou de rayon 2,5 cm).
Appelle C un des points d'intersection des deux cercles
4 *Trace le triangle équilatéral ABC.*
5 Trace le cercle de centre C et passant par A (ou par B , ou de rayon 2,5 cm).
Appelle M le deuxième point d'intersection entre le cercle de centre A et celui de centre C.
Appelle Q le deuxième point d'intersection entre le cercle de centre B et celui de centre C.
6 Trace le cercle de centre M et passant par A (ou par C, ou de rayon 2,5 cm).
Appelle N le deuxième point d'intersection entre le cercle de centre M et celui de centre C.
7 Trace le cercle de centre Q et passant par B (ou par C, ou de rayon 2,5 cm).
Appelle P le deuxième point d'intersection entre le cercle de centre Q et celui de centre C.
8 *Trace l'hexagone AMNPQB.*
9 Trace la droite (AN).
Appelle E le point d'intersection du cercle de centre A et du segment [AN].
10 Trace la droite (BP).
Appelle F le point d'intersection du cercle de centre B et du segment [BP].
11 Trace la droite (EF).
12 *Trace le carré AEFB.*

QUESTION 3
La question est relative à l'engagement de l'élève dans la tâche, mais la lecture de l'annexe 5 n'explicite pas la tâche de l'élève. Plusieurs tâches sont possibles :
- tâche 1 : reproduire la figure
- tâche 2 : rédiger les étapes non écrites du programme de construction.
- tâche 3 : reproduire la figure et rédiger les étapes non écrites du programme de construction.

Si la tâche est la 1, l'exercice combine texte et organisation imagée des étapes de construction. Cela permet une lecture rapide et synthétique et évite la répétition de la consigne de traçage d'un cercle. La figure est visible, donc l'élève peut se représenter la tâche finie. A priori, cela est suffisant pour que l'élève s'engage dans la tâche. De plus, cela facilite la tâche surtout aux élèves moins bons lecteurs.

Si la tâche choisie est la deuxième, rien dans la présentation de l'exercice ne motive l'élève pour rédiger les étapes manquantes : la tâche d'écriture est répétitive et non fonctionnelle : pourquoi écrire les étapes alors que le dessin les résume ?

Si la tâche choisie est la troisième, il faudrait annoncer et prévoir de faire utiliser le programme complété à des élèves ne disposant pas du dessin de départ.

QUESTION 4
L'élève doit analyser un énoncé mixte : texte et image. Il est aidé au repérage des composantes successives de la figure par les numéros. Il est conduit à mettre en texte les différentes étapes de la construction effectivement menée. On peut regretter que la numérotation des consignes soit stricte (et limitée à 12), ce qui peut induire des rejets de procédures pourtant correctes : mais il semble difficile de faire autrement.

QUESTION 5
Tout dépend de la nature de la tâche.

Tâche 1 : s'il s'agit seulement de reproduire la figure,
- savoir analyser une figure complexe pour repérer les éléments simples,
- savoir tracer une droite
- savoir tracer un cercle

A cela s'ajoutent des savoir faire liés au bon usage des instruments : règle et compas essentiellement.

Tâche 2 : écrire les étapes manquantes du programme de construction,
- repérer et connaître l'élément géométrique à construire associé au numéro,
- savoir qu'une droite est déterminée par deux points,
- savoir qu'un cercle est déterminé par son centre et son rayon (ou un de ses points) :

Tâche 3 : cumul des deux précédentes.

QUESTION 6
A priori, tous les instruments sont autorisés.

QUESTION 7
Pour vérifier qu'il obtient bien un triangle équilatéral, l'élève doit d'abord connaître des propriétés d'un tel triangle : par exemple l'égalité de longueurs des côtés. Puis il doit contrôler

la présence de ces propriétés : il peut contrôler expérimentalement cela en utilisant règle graduée ou gabarit ou compas. Il pourrait aussi le déduire du processus de construction en se rappelant qu'il a trois fois reporté la même longueur.
Pour vérifier qu'il obtient bien un carré, l'élève doit d'abord connaître des propriétés suffisantes pour affirmer que c'est un carré : les propriétés usuelles à l'école sont les angles droits et l'égalité de longueurs des côtés. Puis il doit vérifier si ces propriétés sont bien là. Pour les angles droits, il peut utiliser une équerre ou un gabarit (papier plié convenablement en quatre).
La vérification de l'hexagone régulier ne peut être faite que si le maître précise des propriétés suffisantes pour obtenir un hexagone régulier : ici, inscription dans un cercle et l'égalité de longueurs des côtés. Il y a fort à parier que les élèves seront sensibles à la régularité de l'hexagone qu'ils mettront sur le compte de l'égalité de longueurs des côtés, sans être sensibles à l'autre condition.

ROUEN 2

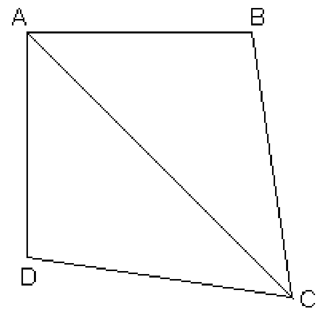
PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

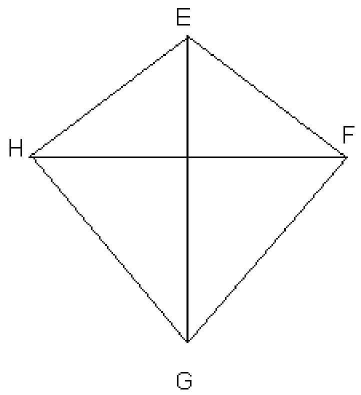
Partie A

1)

ABCD est un exemple de quadrilatère isocervolant en A : l'angle Â est droit et la diagonale (AC) est axe de symétrie



EFGH est un exemple de quadrilatère qui admet un axe de symétrie mais n'est pas un isocervolant :
(EG) est axe de symétrie, mais l'angle en E n'est pas droit



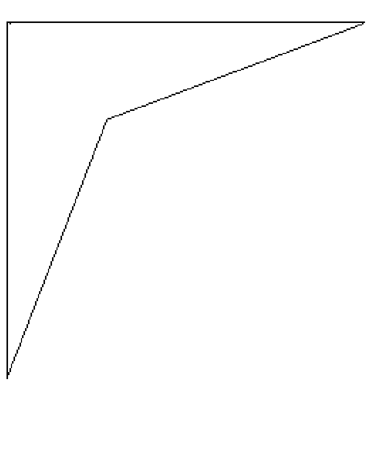
2) Etude des affirmations du texte :

(1) **Un carré est un isocervolant.**

OUI, car un carré a au moins un angle droit et la diagonale qui part de ce sommet est axe de symétrie.

(2) **Un isocervolant est toujours convexe.**

NON, l'angle opposé à l'angle droit peut être plus grand qu'un angle plat, comme le montre le contre-exemple suivant

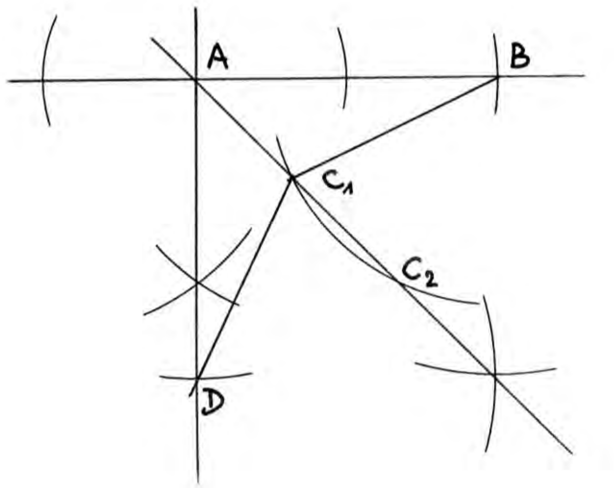


(3) **Tous les rectangles sont des isocervolants.**
NON : un rectangle non carré a au moins un angle droit, mais aucun axe de symétrie ne passe par un sommet.

(4) **Un isocervolant dont les diagonales se coupent en leur milieu est un carré.**
OUI : un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme. Un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle. Un rectangle avec une diagonale axe de symétrie est un carré.

Partie B

1) Par hypothèse l'isocervolant a les propriétés suivantes qui guident la construction à la règle et au compas : l'angle Â est droit ; puisque (AC) est axe de symétrie de ABCD, les côtés [AB] et [AD] ont même longueur et (AC) est aussi bissectrice de l'angle Â. Il existe deux points C répondant à la contrainte BC=3 et C sur la bissectrice de l'angle Â. Un seul est à garder, celui pour lequel AC < BC.



AB = 4
BC= 3
2 points conviennent C_1 et C_2
La solution est C_1
Car $AC_1 < BC_1$

2)
a) ABD est un triangle rectangle d'hypoténuse [BD] : il est donc inscrit dans un demi cercle de diamètre [BD] et de centre O, le milieu de [BD].

b) Calcul de BD
AB = AD car (AC) est axe de symétrie du quadrilatère.
Dans le triangle rectangle ABD, le théorème de Pythagore donne :
$AB^2 + AD^2 = BD^2$ donc $BD^2 = 4^2+4^2=32=16 \times 2$ soit finalement : $BD=4\sqrt{2}$ cm

3)
a) Calcul de l'aire de ABD
Le triangle ABD est la moitié d'un carré de côté de longueur 4 cm.
L'aire de ABD est donc **8 cm².**
Ou la mesure de l'aire est obtenue selon la formule bien connue : $\frac{1}{2} \times AB \times AD$.

b) Calcul de l'aire de ABCD
Par hypothèse, le quadrilatère ABCD admet (AC) comme axe de symétrie, donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Première méthode :
L'aire de ABCD est donc le double de l'aire du triangle ABC, par symétrie.
Or aire (ABC)= $\frac{1}{2} AC \times OB$
OB est le rayon du cercle, donc la moitié de BD. Il vient $OB = 2\sqrt{2}$ cm
De même $OA= 2\sqrt{2}$ cm

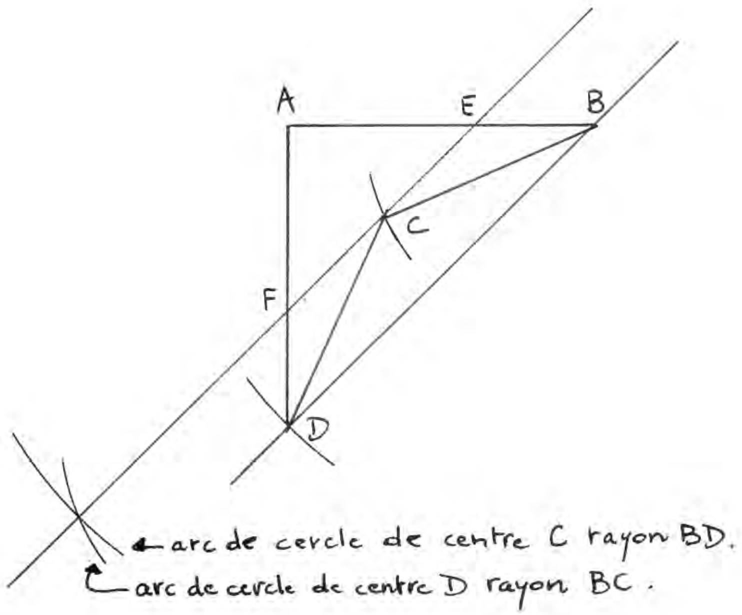
Comme AC = AO - OC, il reste à calculer OC, qui est le troisième côté du triangle rectangle OCB ; on peut donc appliquer le théorème de Pythagore
$OC^2 + OB^2 = BC^2$ donc $OC^2 = 3^2 - 8 = 1$ donc : OC=1 cm
Il vient $AC= (2\sqrt{2} - 1)$ cm

$AC \times OB = (2\sqrt{2} - 1) \times 2\sqrt{2} = 8 - 2\sqrt{2}$
L'aire du quadrilatère ABCD est donc : $(8 - 2\sqrt{2})$ cm²

Deuxième méthode
L'aire de ABCD est la différence entre celle du triangle ABD et celle du triangle BCD
Or aire (ABD) = 8 cm²
Aire (BCD) = $\frac{1}{2} \times BD \times OC$
BD est connu grâce à 2b) : $BD = 4\sqrt{2}$ cm
OC peut se calculer comme dans la première méthode : OC = 1 cm
Donc aire (BCD) = $2\sqrt{2}$ cm²

Finalement
Aire (ABCD) = $(8 - 2\sqrt{2})$ cm²

4
a)



b) Calcul de CE :
Les droites (CE) et (OB) sont parallèles : dans le triangle AOB, on peut appliquer le théorème de Thalès ; en particulier les triangles ACE et AOB sont homothétiques et

$\frac{CE}{OB} = \frac{AC}{AO}$. Or on sait que OB=OA. Donc CE = AC = $(2\sqrt{2} - 1)$ cm d'après la question 3.b)

c) Calcul de l'aire de BDFE :
L'aire du quadrilatère BDFE peut s'obtenir par différence entre celle du triangle ABD et celle du triangle AEF.

Calcul de l'aire de AEF
Première méthode :
Aire (AEF) = 2 x aire (ACE) = AC x AE car (AC) est axe de symétrie de AEF et (AC) et (CE) sont perpendiculaires , comme le sont (AC) et (BD).
Or AC = EC = $2\sqrt{2} - 1$ donc aire (AEF) = $(2\sqrt{2} - 1)^2 = 4 \times 2 + 1 - 4\sqrt{2}$
Donc aire (AEF) = $(9 - 4\sqrt{2})$ cm^2
Or aire (ABD) = 8 cm^2
$8 - (9 - 4\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 1$ donc l'aire de BDEF est $(4\sqrt{2} - 1)$ cm^2.

Deuxième méthode :
AEF est homothétique de ABD dans le rapport $\frac{AC}{AO}$ soit $\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$.

L'aire de AEF est donc $\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2$ fois l'aire de ABD.

Or $\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4\times 2+1-4\sqrt{2}}{4\times 2} = \frac{9-4\sqrt{2}}{8}$.

Donc aire (BDEF) = aire (ABD) - $\frac{9-4\sqrt{2}}{8}$ aire (ABD) = (1- $\frac{9-4\sqrt{2}}{8}$) aire (ABD) donc

aire (BDEF) = $\frac{4\sqrt{2}-1}{8}$ aire (ABD).

On retrouve : aire (BDEF) = (4 $\sqrt{2}$ - 1) cm^2

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1) CONNAISSANCES GÉOMÉTRIQUES

Les élèves doivent avoir des connaissances sur le triangle rectangle et sur le demi-cercle. Ces connaissances doivent porter sur le vocabulaire, ainsi que sur les propriétés liées à ces figures. Par ailleurs, ils doivent maîtriser la notion de longueur, et savoir aussi utiliser les outils de construction pertinents.

2) INSTRUMENTS

Instruments	*Usage*
équerre	Construire l'angle droit
règle graduée	Tracer les côtés du triangle Tracer les côtés de même longueur Fixer le milieu de l'hypothénuse
compas	Tracer les côtés de même longueur Construire le demi-cercle

Remarque : En observant les productions d'élèves, on s'aperçoit qu'ils utilisent systématiquement le milieu du “ grand côté ” du triangle même si cela n'apparaît pas dans la consigne. Si l'on prend en compte cet élément dans la construction, l'on peut ajouter que ce milieu peut être trouvé soit avec la règle graduée, soit avec l'équerre car les triangles sont isocèles (le tracé de la médiatrice du “ grand côté ”, avec compas et règle n'est pas un savoir-faire de cycle 3).

3) UNE INFINITÉ DE FIGURES RÉPONDENT AU TEXTE PROPOSÉ :

Quel sens donner à l'expression “ ***sur*** *le grand côté ” ; rien n'est précisé quant au centre du demi cercle, quant à son rayon : on ne sait dans quel demi-plan le demi cercle doit se situer.*
De ce fait, on peut considérer que les productions B et D (aux imprécisions de l'angle droit près) répondent à la consigne du maître.
Par contre, les productions C et A sont erronées : dans la production C, un rectangle remplace le triangle attendu et dans la production A, le triangle n'a pas d'angle droit.

4) RÉDACTION D'UN ÉNONCÉ :

“ Trace un triangle rectangle et qui a deux côtés de même longueur. Marque le milieu du plus grand côté. Trace un demi-cercle de centre ce milieu et qui passe par les 3 sommets de ce triangle. ”

SECOND VOLET (8 POINTS)

1)
Soit c la mesure du côté d'un carré (en cm). Ce carré pave le rectangle si 144 contient un nombre entier de fois c et 96 aussi, donc si 144 et 96 sont des multiples de c, donc si c est un diviseur commun à 144 et 96.
On voit tout de suite que c=2 convient…
Le plus grand carré possible correspond au plus grand diviseur commun de 144 et 96.
Exemple de calcul de ce PGDC :
$144 = 12 \times 12 = 3^2 \times 4^2 = 3^2 \times 2^4$ et $96 = 3 \times 3^2 = 3 \times 2^5$
PGDC $(144,96) = 3 \times 2^4 = 48$

La longueur du côté du plus grand carré qui pave le rectangle est 48 cm.

2)
La notion mathématique sous-jacente est celle de diviseur (ou de multiple).
On peut proposer la situation 1 au cycle 3, c'est un réinvestissement de la notion de multiple.

3)
Proposition 1 :
84 x 48 = 4032
Je peux recouvrir le rectangle de 4032 carrés de 1 carreau.

Avec des carrés de 2 carreaux de côté[24]
84 = 2 x 42 48 = 2 x 24 et 42 x 24 = 1008
Je peux recouvrir le rectangle avec 1008 carrés de ce type.

Avec des carrés de 3 carreaux de côté
84 = 3 x 28 48 = 3 x 16 et 28 x 16 = 448
Je peux recouvrir le rectangle avec 448 carrés de ce type.

Avec des carrés de 4 carreaux de côté
84 = 4 x 21 48 = 4 x 12 et 21 x 12 = 252
Je peux recouvrir le rectangle avec 252 carrés de ce type.

L'élève peut s'arrêter là, car il a trouvé plusieurs solutions ou continuer et exhiber d'autres solutions sans pour autant les obtenir toutes.

Proposition 2 :
L'élève essaie de recouvrir le rectangle avec des carrés de 24 carreaux de côté (la moitié de la

[24] On utilisera cet abus de langage pour désigner un carré dont la longueur du côté est deux fois celle d'un carreau.

largeur du rectangle), puis avec des carrés de 16 carreaux de côté (le tiers de la largeur du rectangle), etc.
S'il essaye avec des carrés de 12 carreaux de côté, il obtiendra une solution et risque de s'arrêter là car cette résolution est très lourde. Il est aussi possible que cela l'incite à basculer dans un cadre numérique.

Proposition 3 :
Hypothèses et essais successifs sur une longueur de carré qui « marche »

Remarque : le fait de demander de faire le recouvrement est maladroit, il empêche a priori de faire des hypothèses numériques avant de compléter le dessin. Posé dans un cadre géométrique, ce problème ne peut raisonnablement être traité que dans un cadre numérique.

4)
Connaissances et compétences en jeu :
- connaître des propriétés du carré (notamment l'égalité des longueurs des côtés),
- reconnaître un problème multiplicatif,
- savoir faire des essais,
- savoir calculer des produits (ou utiliser la calculatrice).

5)

Variables	Situation 1	Situation 2
Le cadre de la question	Géométrique (incite à dessiner)	Numérique (incite à des calculs)
Les valeurs numériques	Entiers	Décimaux non entiers (complique la reconnaissance d'un problème de multiples)
La dimension du rectangle	fournie avec son quadrillage (donc avec des petits carreaux)	dessin non fourni (et non réalisable en grandeur réelle sur la feuille)

Le nombre de solutions n'est pas une variable didactique : a priori, cette variante ne changera pas les procédures des élèves.

6.)
Benoît n'annonce pas explicitement de réponse.
Il travaille sur l'aire du rectangle et recherche le nombre de figures contenues dans le rectangle dont l'aire est égale à celle d'un carré de 4 carreaux de longueur. Il en trouve 252. Mais rien ne dit si ces figures :
- sont superposables
- sont des carrés.

Implicitement
- il assimile (à tort) figures de mêmes aires (ici 16 cm^2) à figures superposables ;
- il pense (à tort) que les figures dont l'aire (en cm^2) mesure un nombre carré parfait sont nécessairement des carrés.

Il se trouve que ces théorèmes en acte donnent ici une réponse correcte, bien que la procédure soit erronée.

Pour montrer que la procédure est erronée, le texte fournit un contre-exemple : avec un rectangle de 82 sur 72, donc d'aire 5904, il trouverait 369 carrés de côté 4.
Ce qui est alors une réponse fausse puisque les carrés de côté 4 carreaux ne pavent pas le rectangle (82 n'est pas multiple de 4 : on ne peut donc pas disposer un nombre entier de tels carrés sur la longueur).

TOULOUSE.

PREMIER VOLET (12 POINTS)

PREMIERE EPREUVE (8 POINTS)
MAITRISE DE CONNAISSANCES MATHEMATIQUES.

A. PROCÉDÉ DE FABRICATION

1)
a) Le rouleau de carton déplié mesure 700m soit 700 000 mm de long. Pour produire un emballage, il faut 265 mm de ce rouleau. Pour trouver le nombre d'emballages que l'on peut produire à partir de ce rouleau, il suffit de déterminer le quotient entier de 700 000 par 265.
70 000 = 265 × 2641 + 135
avec 135 < 264
On peut donc produire 2641 emballages dans un rouleau.

b) On suppose que la masse de carton est proportionnelle à l'aire, la largeur du rouleau étant constante, la masse est donc proportionnelle à la hauteur de la boite.
Pour 700 000 mathématiques, la masse est de 80 000g ; pour 265 mathématiques, elle est donc, à 10^{-3} grammes près, de 30,285 g

$$\frac{80000 \times 265}{70000} = 30{,}285\ldots$$

Autre méthode :
En fabriquant 2641 emballages, on utilise 695,865 mètres de carton
car 0,265 × 2641 = 695,865.
700 mètres pèsent 80 kg
695,865 mètres pèsent

$$\frac{80 \times 695{,}865}{700} = 79{,}984\ldots$$

c'est à dire 79,984 kg pour 2641 boîtes.
Une boîte pèse donc 2641 fois moins, ce qui donne, au milligrammes près : 30,285 g.

2)
Le périmètre du rectangle de section du tube prismatique est 2a + 2b. Il faut un centimètre pour la soudure. La largeur du carton est de 33 cm. On a donc
2a + 2b + 1= 33
2(a + b) = 32
soit a + b = 16
La relation demandée est donc : a + b = 16, soit a = 16 - b.

3)
a) On a, compte tenu des contraintes de replis et de soudure :

$$L = h + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + 2$$

C'est à dire, en centimètres
h + b + 2 = 26,5
h + b = 24,5, soit h = 24,5 - b.

b) Le volume d'un prisme droit à base rectangulaire est le produit de ses trois dimensions, on a donc
V(b) = a × b × h
Or a = 16 - b et h = 24,5 - b
On a donc en cm^3
V(b) = (16 - b) × b × (24,5 - b)
$V(b) = b(16 \times 24,5 - 24,5\ b - 16\ b + b^2)$
$V(b) = b^3 - 40,5\ b^2 + 392\ b$

B. DÉTERMINATION DE DIMENSIONS

1)
a) Une lecture du graphique représentant les variations de la fonction V en fonction de b, nous donne V(b) maximal pour une valeur de b en centimètres comprise dans l'intervalle d'amplitude 4 mm suivant :
6,1< b < 6,5
b) la valeur en cm^3 du volume maximal est comprise dans l'intervalle d'amplitude $10cm^3$ suivant :
$1110 < V_{max} < 1120$

2)
a) 1 litre = 1000 cm^3
Par lecture du graphique, on peut déterminer l'encadrement de b par les deux entiers consécutifs 4 et 5 :
4 < b < 5

b) V est une fonction croissante sur l'intervalle [4, 5], on peut calculer par approximation linéaire une valeur de b dans un intervalle d'amplitude 1mm pour laquelle V(b) = 1000 cm^3
On calcule V(4) et V(5) en utilisant la formule $V(b) = b^3 - 40,5b^2 + 392b$
V(4) = 984
V(5) = 1072,5

On a :

$$\frac{V(b)-V(4)}{b-4}=\frac{V(5)-V(4)}{5-4}$$
$$\frac{V(b)-984}{b-4}=88{,}5$$
$$(b-4)\times 88{,}5 = V(b)-984$$
$$\text{or } V(b)=1000$$
$$88{,}5b-354=1000-984$$
$$88{,}5b=370$$
$$b\approx 4{,}18$$

L'encadrement cherché est donc :
$4{,}1 < b < 4{,}2$

Autre méthode, en utilisant la calculatrice :
On constate sur le graphique que la valeur de b pour V(b) = 1000 cm^3 est plus proche de 4 que de 5 ; la fonction V étant croissante, on calcule V(4), V(4,1), V(4,2) etc. jusqu'à atteindre ou dépasser 1000.

V(4) = 984
V(4,1) = 995,316
V(4,2)= 1006,068

La fonction V étant continue, la valeur de b cherchée est comprise entre 4,1 et 4,2.

3)
Pour que a = b, sachant que a + b = 16, il faut que a et b soient égaux à 8.
V(h) = 8 × 8 × h = 64 h
La brique doit avoir un volume 1000 cm^3 (1 litre), on a donc

64 × h = 1000
h = 15,625

La longueur de carton nécessaire est alors de 15,625 + 4 + 4 + 2 c'est à dire 25,625 cm
La longueur du rouleau est toujours 70 000 cm,
Le quotient entier de 70 000 par 25,625 est 2731
On pourrait alors fabriquer 2731 briques.

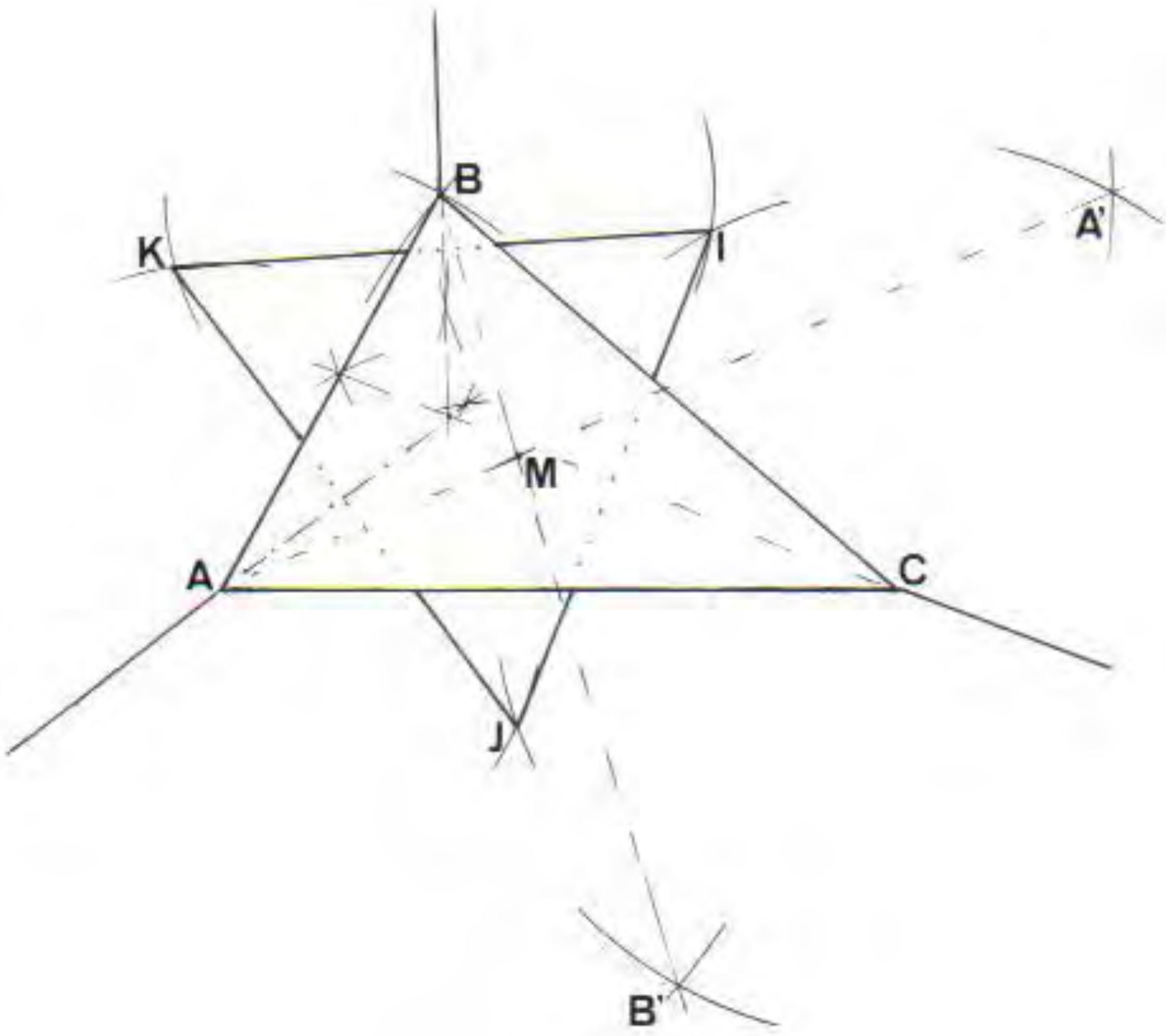
C. CHOIX D'UN LOGO.

1)
a) voir figure page suivante. (On ne demande pas de décrire la construction, il suffit de laisser les traits de construction apparents).
Le centre de gravité M du triangle ABC est le point d'intersection des trois médianes du triangle ; pour l'obtenir, il suffit donc de tracer deux médianes..

Première méthode : Pour déterminer par exemple les milieux des côtés [AC] et [BC], on peut tracer les médiatrices des segments [AC] et [BC].

Autre méthode : Construire le sommet A’ du parallélogramme ACA’B. La droite (AA’) est une diagonale de ce parallélogramme, elle passe par le milieu de l’autre diagonale [BC] : c’est la médiane de ABC issue de A. Construire le sommet B’ du parallélogramme AB’CB. La droite (BB') est une diagonale de ce parallélogramme, elle passe par le milieu de l'autre diagonale [AC] : c'est la médiane issue de B. Le centre de gravité M du triangle ABC est l'intersection de (AA') et de (BB').

Cette construction permet d'alléger la figure. Nous la proposons ci-dessous.



b) La droite Δ_1 est perpendiculaire à (KJ) et passe par A, montrons que Δ_1 est médiatrice de [KJ]. Pour cela il suffit de montrer que A est à même distance de K et de J.

AM = AK car K est le symétrique de M par rapport à la droite (AB) donc (AB) est médiatrice du segment [MK].

AM = AJ car J est le symétrique de M par rapport à (AC) donc (AC) est médiatrice du segment [MJ]

On en déduit AK=AJ

Δ_1 est donc la médiatrice de [KJ].
On démontrerait de manière analogue que Δ_2 est médiatrice de [IK] et que Δ_3 est médiatrice de [IJ]
Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont les médiatrices des trois côtés du triangle IJK, elles sont concourantes en un point H, centre du cercle circonscrit au triangle IJK.

2)
60,8% des 750 personnes ont voté pour le logo :

$$\frac{60{,}8}{100} \times 750 = 456$$

donc 456 personnes ont voté pour le logo.
soit *f* le nombre de femmes et *h* le nombre d'hommes dans l'entreprise
On a donc

$$f + h = 750$$
$$\frac{64}{100} \times f + \frac{56}{100} \times h = 456$$
d'où
$$\frac{64}{100} \times f + \frac{56}{100}(750 - f) = 456$$
$$64f - 56f = 45600 - 56 \times 750$$
$$8f = 3600$$
$$f = 450$$
$$h = 300$$

Il y a donc 450 femmes et 300 hommes dans cette entreprise.

DEUXIEME EPREUVE (4 POINTS)
ANALYSE DE TRAVAUX D'ELEVES

1)
a)
On peut trouver de nombreuses procédures acceptables :

1. Prix des deux pains $3{,}50 \times 2 = 7$ F Prix des trois croissants $3{,}80 \times 3 = 11{,}40$ F Prix des pains et des croissants $7 + 11{,}40 = 18{,}40$ F Prix de la tarte aux pommes $69{,}50 - 18{,}40 = 51{,}10$ F	***1'***. Prix des deux pains $3{,}50 + 3{,}50 = 7$ F Prix des trois croissants $3{,}80 + 3{,}80 + 3{,}80 = 11{,}40$ F Prix des pains et des croissants $7 + 11{,}40 = 18{,}40$ F Prix de la tarte aux pommes $69{,}50 - 18{,}40 = 51{,}10$ F
2. Prix des deux pains $3{,}50 \times 2 = 7$ F Prix des trois croissants $3{,}80 \times 3 = 11{,}40$ F Prix de la tarte aux pommes $69{,}50 - 7 - 11{,}40 = 51{,}10$ F	***2'***. Prix des deux pains $3{,}50 + 3{,}50 = 7$ F Prix des trois croissants $3{,}80 + 3{,}80 + 3{,}80 = 11{,}40$ F Prix de la tarte aux pommes $69{,}50 - 7 - 11{,}40 = 51{,}10$ F
3. prix des deux pains et des trois croissants $(3{,}50 \times 2) + (3{,}80 \times 3) = 18{,}40$ F Prix de la tarte aux pommes $69{,}50 - 18{,}40 = 51{,}10$ F	***3'.*** prix des deux pains et des trois croissants $3{,}50 + 3{,}50 + 3{,}80 + 3{,}80 + 3{,}80 = 18{,}40$ F Prix de la tarte aux pommes $69{,}50 - 18{,}40 = 51{,}10$ F
4. Prix de la tarte aux pommes $69{,}50 - (3{,}50 \times 2) - (3{,}80 \times 3) = 51{,}10$ F	***4'***. Prix de la tarte aux pommes $69{,}50 - 3{,}50 - 3{,}50 - 3{,}80 - 3{,}80 - 3{,}80 = 51{,}10$ F

b)
Les lignes du tableau précédent montrent des façons de procéder correspondant au nombre d'étapes intermédiaires envisagées pour résoudre le problème (ligne 1 : résolution en 4 étapes ; ligne 2 résolution en 3 étapes ; ligne 3 résolution en deux étapes, ligne 4 résolution en une seule étape).
Les colonnes du tableau précédent correspondent au modèle mathématique retenu : dans la première colonne, le modèle multiplicatif est convoqué ; dans la seconde seul le modèle additif est utilisé.

c)
Les compétences mathématiques requises pour résoudre le problème sont :
- la reconnaissance d'étapes intermédiaires indispensables à la résolution,
- la reconnaissance du modèle additif ou multiplicatif pour résoudre les différentes étapes,
- la maîtrise du calcul d'additions de soustractions des décimaux d'ordre 2 et éventuellement du calcul du produit d'un décimal par un entier.

On peut détailler davantage :
- donner une signification au contexte de la situation,
- identifier les données et ce qu'elles représentent,
- identifier les étapes intermédiaires,
- identifier les relations entre ses données (additives, soustractives, multiplicatives), et les traduire par des opérations,
- poser correctement les opérations,
- effectuer les calculs,
- reporter la réponse dans le contexte,
- vérifier la pertinence de la réponse.

2°)
a) Benoît pense sans doute que les 2 pains coûtent 3,50F en tout et que les croissants coûtent 3,80F en tout.
Il peut s'agir d'une difficulté de compréhension des termes "chacun" et "pièce".
Une autre explication possible de l'erreur de Benoît serait le fait qu'il n'ait pas pris les nombres de pains et de croissants en compte parce qu'ils sont écrits en lettres.

b) Christian utilise la procédure que nous avons codée ***2*** à la question 1.
Il utilise le modèle multiplicatif et résout le problème en 3 étapes.
Il fait une erreur dans la soustraction 69,50 - 7 dans laquelle il oublie de reporter les centimes.
Il ne fait pas d'erreur dans la soustraction suivante qui est pourtant à retenues.
Il ne vérifie pas sa réponse.

c) Aline utilise la procédure que nous avons codée ***3*** à la question 1. Elle procède en deux étapes en utilisant un modèle additif. Le résultat est correct. Pour faire évoluer la procédure utilisée, il serait nécessaire d'augmenter le nombre de pains et de croissants de manière à ce que les calculs additifs deviennent trop coûteux.

d) Denis utilise la procédure que nous avons codée ***2*** à la question 1. Il effectue correctement les deux calculs multiplicatifs, trouve le prix global des petits pains et des croissants. Il fait une erreur dans le calcul du prix de la tarte aux pommes car il dispose mal l'opération et soustrait 18,40 à 69,50. Il semble cependant connaître assez bien la technique de la soustraction comme l'attestent les retenues posées. En effet, lorsqu'il effectue cette soustraction, il calcule correctement les centièmes, les dixièmes, les unités en plaçant les retenues convenablement. Pour les dizaines, il soustrait 7 à 11, en retenant une centaine, qu'il semble avoir abaissé devant le 4 du résultat et qu'il a noirci en raison peut-être d'une estimation de l'ordre de grandeur du résultat.

SECOND VOLET (8 POINTS)

1) ANALYSE DU DOCUMENT 1 (SÉQUENCE 32)

a)
Les compétences que l'on cherche à développer dans cette séquence sont les suivantes :
- Lire divers types de représentations graphiques, c'est à dire savoir trouver et interpréter les informations qu'elles contiennent, comprendre que le choix du mode de représentation permet de rendre les comparaisons plus ou moins visuelles et donc plus ou moins aisées.
- Construire un graphique à partir d'un certain nombre d'informations.
- Passer d'un mode de représentation en graphique à un mode de représentation en tableau de nombres.
- Passer d'un mode de représentation à un autre en cherchant à trouver celui qui permettrait de mieux visualiser les informations qui sont données.

b)
Dans l'exercice 1, les élèves apprennent à lire un graphique en histogramme et à interpréter ces informations.
Dans l'exercice 2, les élèves apprennent à lire un graphique en étoile et à transformer ce mode de représentation en un tableau à deux colonnes.
L'exercice 3 développe à nouveau les compétences de lecture d'informations représentées sous forme en partie imagée, et de choix d'autre mode de représentation pour ces informations.
Dans l'exercice 4, il s'agit d'identifier ce que représentent les divers pourcentages et de construire un graphique pour représenter ces informations d'une autre manière, de façon à rendre les comparaisons plus faciles.

c)
Dans l'activité de découverte, la première question est trop ouverte si elle n'est pas précisée par le maître. Les réponses peuvent être très anecdotiques et ne pas conduire à une analyse précise des différents modes de représentation proposés. Quatre modes différents de représentation d'informations relatifs à quatre sujets différents sont présentés : de ce fait, la comparaison demandée dans la question 2 est difficile puisqu'elle doit, en particulier, porter sur la pertinence du choix du mode de représentation en fonction des données à représenter, et ne pas porter sur la comparaison des situations évoquées elles-mêmes.
En ce qui concerne la question relative aux informations que ces modes de représentation apportent, il va de soi que la présence du maître est indispensable s'il souhaite obtenir d'autres réponses que la simple lecture du titre.
C'est en questionnant les élèves que le maître peut développer chez eux les compétences de lecture d'informations sur des supports divers mentionnées dans les textes officiels.
La dernière question permet de constater que les tableaux de nombres ne permettent pas de visualiser les informations importantes à retenir aussi bien que les modes de représentation proposés ici.

2) ANALYSE DU DOCUMENT II EXTRAIT DU LIVRE DU MAÎTRE (RELATIF À LA SÉQUENCE 32)

a)
L'activité collective proposée replace cette séquence dans le contexte de la vie sociale. Il s'agit d'une activité utilisant les mathématiques pour développer chez les élèves des compétences nécessaires à leur vie de futur citoyen d'une société dans laquelle de très nombreuses informations sont transmises par la presse ou la télévision sous forme de graphiques divers.
Ceci peut contribuer à permettre aux élèves de donner du sens à ce qu'ils vont avoir à faire.
Elle est nécessaire pour permettre au maître de préciser le vocabulaire et éventuellement d'apporter des termes nouveaux, d'expliciter l'expression "lire un graphique" puisque il s'agit d'un mode de lecture particulier différent de celui mis en œuvre habituellement lorsqu'on parle de lecture.
Elle permet enfin aux élèves d'entrer dans l'activité par des échanges entre le maître et les élèves, échanges au cours desquels le maître pourra repérer les compétences déjà acquises et celles à renforcer au cours de cette séquence.

b)
L'objectif de cette situation de communication entre élèves ou entre groupes d'élèves est de permettre aux élèves, en tant qu'émetteurs, de chercher des questions auxquelles un graphique déterminé permet de répondre, de rédiger ces questions et de valider leur pertinence en recevant les réponses d'un autre élève ou groupe d'élèves.
En tant que récepteurs, les élèves sont invités à lire les questions de leur(s) camarades(s) et à chercher les réponses dans le graphique, donc à lire le graphique avec une intention.
Un travail en groupe serait plus intéressant pour qu'il y ait échanges de point de vue entre les élèves aussi bien dans la phase d'élaboration des questions que dans celle de réponses aux questions posées. Il contribuerait de plus à éviter d'éventuels blocages et à impliquer davantage les élèves.

3) ANALYSE DU DOCUMENT III (SÉQUENCE 33)

a)
Dans cette séquence, les élèves vont renforcer les compétences développées à la séquence précédente, mais en plus, il vont apprendre à construire des graphiques ou des diagrammes.

b)
La situation de découverte concerne la croissance en taille des filles et des garçons de 1 à 15 ans. Dans chacun des cas, il s'agit d'une fonction croissante sur l'intervalle [1, 15]. Les élèves vont donc rencontrer intuitivement les notions de variation, de fonction croissante, de croissance comparée, éventuellement celle de majorant puisqu'il s'agit de fonctions bornées.
Les questions vont conduire les élèves à donner du sens aux coordonnées du point d'intersection des deux courbes, et à réfléchir à la pertinence de la notion d'extrapolation suivant les contextes.

c)

Exercice	Compétences	Difficultés prévisibles
1	Construire un repère. Choisir des unités pertinentes pour graduer les axes. Placer des points dont l'ordonnée est un	Difficulté de positionner matin et soir qui ne sont pas des données numériques. Comprendre que l'origine sur l'axe des

	nombre décimal.	ordonnées peut ne pas être 0. Repérer les dixièmes sur l'axe des ordonnées.
2	Comprendre que l'écart entre les âges de deux personnes est indépendant des années, et utiliser cette connaissance pour remplir un tableau. Construire deux graphiques dans le même repère pour les comparer. Comparer les deux graphiques.	Difficulté à comprendre la situation. Difficulté à comprendre quelles sont les colonnes du tableau qui peuvent être représentées dans le repère qui est fourni. Difficulté à comprendre que l'origine représente à la fois l'âge 0 en tant que point de l'axe des ordonnées et l'année 1973 en tant que point de l'axe des abscisses. Difficultés à interpréter le parallélisme des droites en terme d'écart constant entre les âges
3	Construire un repère. Choisir des unités pertinentes pour graduer les axes. Représenter une fonction constante par intervalles par des segments horizontaux.	Difficulté à envisager une fonction constante par intervalles. Difficultés pour choisir l'image des bornes des intervalles.

Index de quelques mots clés :