La fonction filtrage (Chap 4)

❑ Révisé et compris ❑ Chapitre à retravaillé ❑ Chapitre incompris

1. Généralité sur le filtrage :

DEF	**Le filtre** est un quadripôle linéaire (2 bornes d'entrées, et 2 bornes de sorties), qui ne laisse passer que les signaux compris dans un domaine de fréquence limité, appelé la bande passante.

Un filtre modifie le spectre du signal d'entrée, ce qui signifie que le spectre du signal de sortie ne sera pas identique à celui présenté en entrée. Il n'y a cependant pas création d'harmonique (ce qui est justifié par le fait que c'est un quadripôle linéaire), mais il y a disparition de certaines harmoniques (ce qui met en évidence le phénomène de filtrage).

Les filtres permettent :
- d'éliminer des parasites, des bruits
- de sélectionner une fréquence, ou une bande de fréquence.

2. Fonction de transfert, ou transmittance d'un filtre

DEF	La transmittance ou fonction de transfert d'un filtre en régime sinusoïdale est, en notation complexe, le nombre complexe T égal au rapport : $\underline{T} = \frac{\underline{Vs}}{\underline{Ve}} = \frac{[Us;\varphi_s]}{[Ue;\varphi_e]} = [\frac{Us}{Ue};\varphi_s - \varphi_e]$

Pour étudier un filtre, nous avons recours à deux représentations graphiques, qui constitue le diagramme de Bode :
- Le module de la transmittance, en fonction de la fréquence (ou de la pulsation)
- L'argument de la transmittance, en fonction de la fréquence (ou de la pulsation)

Etant donné que nous étudions le comportement des filtres sur des plages de fréquences, souvent très large, l'emploi du papier millimétré devient inadapté, c'est pourquoi nous aurons recours à du papier semi-logarithmique.

3. Les deux catégories de filtres :

DEF	Un filtre passif n'est constitué que de dipôles passifs linéaires, comme la résistance, la bobine et le condensateur.

DEF	Un filtre actif est constitué de dipôles passifs linéaires, et de composants actifs : transistors, amplificateurs opérationnels. Ils nécessitent donc une source d'énergie pour fonctionner.

4. Les filtres idéaux :

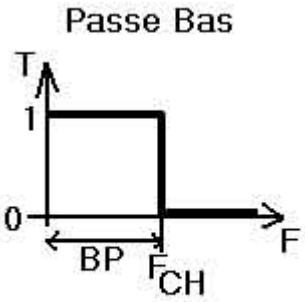
DEF	**Pour qu'un filtre soit idéal**, il faudrait que la transmittance soit égale à 1, pour les fréquences comprises dans la bande passante, et qu'elle soit égale à 0, pour les autres fréquences (celles qui ne sont pas comprises dans la bande passante).

DEF	**La bande passante** du filtre idéal est l'intervalle de fréquence **[f_{cb} ; f_{ch}]** pour lesquelles la transmittance est égale à 1. **F_{cb}** est la fréquence de coupure basse **F_{ch}** est la fréquence de coupure haute. La bande passante (ou largeur de bande passante), est égale à : $BP = F_{CH} - F_{CB}$, en Hertz

Gabarit des filtres idéaux :

Le gabarit d'un filtre est en réalité la représentation du module de la transmittance en fonction de la fréquence.

a) Le filtre passe bas :



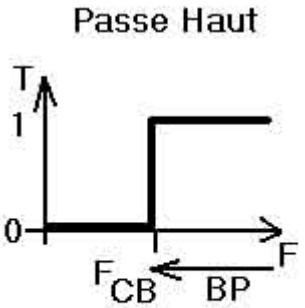
$BP = [\,0 ; F_{CH}\,]$

Le filtre passe bas, comme son nom l'indique, ne laisse passer que les signaux ayant une fréquence inférieure ou égale à sa fréquence de coupure haute.

Sur le graphe représenté ci-contre, on voit que lorsque la fréquence est inférieure à la fréquence de coupure haute, la transmittance est égale à 1, ce qui signifie que la tension présente en sortie, est identique à celle présente en entrée.

Si la fréquence est supérieure à la fréquence de coupure haute du filtre, la transmittance sera égale à 0, car la tension de sortie sera nulle.

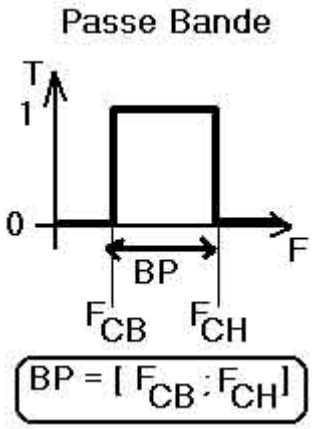
b) Le filtre passe haut :



$BP = [\,F_{CB} ; +\infty\,[$

Le filtre passe haut, quand à lui, ne laisse passer que les signaux dont la fréquence est supérieur ou égale à la fréquence de coupure basse.

Le raisonnement est analogue à celui que nous avons utilisé pour la démonstration du filtre passe bas.



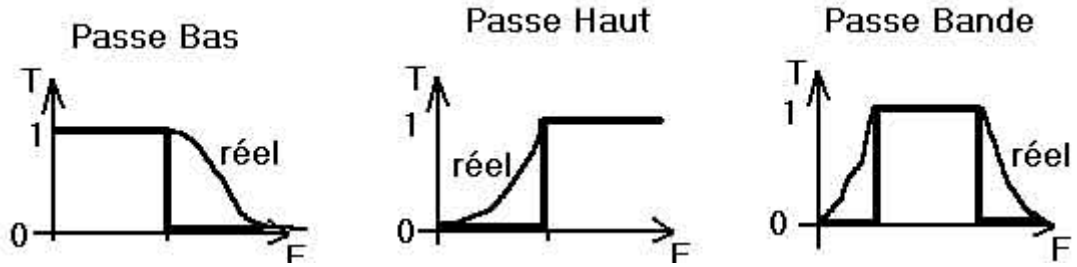
c) Le filtre passe-bande :

Le filtre passe bande, ne laisse passer que les signaux ayant une fréquence comprise entre la fréquence de coupure basse du filtre, et sa fréquence de coupure haute.

Ce dernier, est principalement utilisé dans les récepteurs radio. En effet, le filtre sélectionne une plage de fréquence plus ou moins étroite, correspondant à la plage de fréquence que nous voulons écouter sur notre récepteur.

5. Les filtres réels

Il est techniquement parlant, impossible de réaliser des filtres idéaux. Les filtres réels ne possèdent pas des courbes de réponses idéal, et on ne peut définir les fréquences de coupure de la même façon, c'est pourquoi nous allons les étudiés.



Les graphes ci-dessus, illustre bien, la différence entre les filtres idéaux, et les filtres réels.

Dans la suite du cours, nous allons nous intéresser uniquement aux filtres réels.

6. Le gain G, d'un filtre :

La transmittance d'un filtre peut varier dans de très grandes proportions, et il faut pouvoir lire sur un graphique des valeurs très différentes, comme T=0.1, ou T=1000. Nous utilisons donc une échelle logarithmique en ordonnée (axe l'horizontal…), et nous définissons, une grandeur, appelé gain. L'intérêt du gain, est d'accentuer les petites valeurs, et de compresser les plus faibles.

DEF	Si T, est le module de la transmittance d'un filtre, alors son gain G est égal à : **G = 20 x log T** C'est un grandeur sans dimension, ayant pour unité le **décibel**.

Attention : Le « log » est la fonction « logarithme », il ne faut pas le confondre avec son compère, l'algorithme népérien.

7. La bande Passante à – 3dB :

DEF	La bande passante à -3bB, est l'intervalle de fréquences pour lequel on a un gain G, supérieur ou égal à : **G(max) – 3dB** Ou bien, un module de la transmittance T, tel que :

	T > T(max) / √2

Propriétés de la fonction logarithmique :

DEF	**1) Log (a x b) = log (a) + log (b)** **2) Log (a /b) = log (a) + log (b)** **3) Log (1 /a) = - log (a)** **4) Log a^n = n x log (a)**

Vérifions que G(max) – 3dB correspond à T(max) / **√2 :**

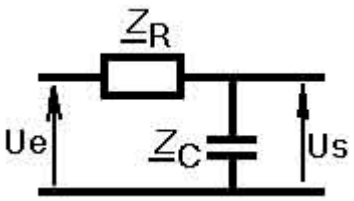
$$G = 20 \times \log (T_{(max)} / \sqrt{2})$$

$$G = 20 \times \log (T_{(max)}) - 20 \log (\sqrt{2})$$

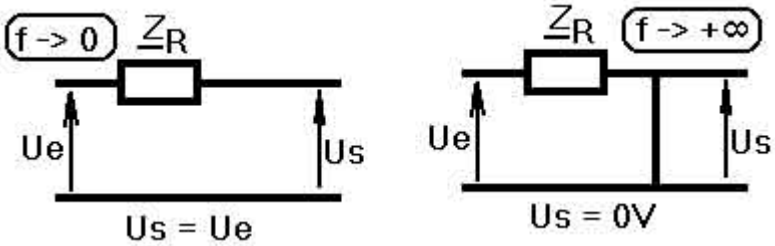
Le passage de la première égalité à la seconde, n'a rien de sorcier : on applique simplement la deuxième propriété sur les logarithmes.

8. Le filtre passe bas :

Ce dernier peut se réaliser de moult manière, pour l'étude didactique, nous allons nous tourner vers l'association d'une résistance et d'un condensateur.



Nous avons sur ce schéma, une résistance et un condensateur. Afin de comprendre pourquoi ce filtre est passe-bas (il ne laisse passer les signaux ayant une fréquence inférieur à sa fréquence de coupure haute), nous allons faire une étude quantitative.



Pour faire cette étude, il faut savoir que l'impédance d'un condensateur est inversement proportionnel à la fréquence. En haute fréquence, le condensateur se comporte comme un court-circuit, se qui va se traduire par une tension de sortie de 0V.

Etudions sa transmittance :

a) On applique simplement la formule de la transmittance :

T = Us / Ue

b) On commence par exprimer Us :

Par observation sur le schéma, nous voyons que nous pouvons utiliser le diviseur de tension, soit

$$\underline{Us} = \underline{Ue} \times \frac{\underline{Zc}}{\underline{Zr} + \underline{Zc}}$$

c) On peut maintenant calculer la transmittance :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Us}}{\underline{Ue}} = \frac{\underline{Ue} \times \frac{\underline{Zc}}{\underline{Zr} + \underline{Zc}}}{\underline{Ue}} = \frac{\underline{Zc}}{\underline{Zr} + \underline{Zc}}$$

d) <u>On cherche à simplifier cette transmittance :</u>

$$\underline{T} = \frac{\underline{Zc}}{\underline{Zr} + \underline{Zc}} \times \frac{\underline{Yc}}{\underline{Yc}} = \frac{1}{1 + (\underline{Yc} \times \underline{Zr})}$$

e) <u>On remplace par les impédances et admittances, de la résistance et du condensateur :</u>

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + jRCw}$$

On vient d'exprimer la transmittance. On exprime ensuite la transmittance sous la forme élémentaire du filtre passe-bas. Cette formule est à admettre, et non à démontrer :

$$\underline{T} = \frac{To}{1 + j\frac{F}{Fo}}$$

<u>Nous pouvons faire l'analogie suivante :</u>

$$To = 1$$

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + jRCw} \qquad \underline{T} = \frac{To}{1 + j\frac{F}{Fo}}$$

$$RCW = \frac{F}{Fo}$$

<u>Ce qui nous donne, pour Fo :</u>

$$RCW = \frac{F}{Fo}$$

$$RC \times 2\pi F = \frac{F}{Fo}$$

$$RC \times 2\pi = \frac{1}{Fo}$$

$$\boxed{Fo = \frac{1}{2\pi RC}}$$

<u>Module de la transmittance T :</u>

On sait par définition, que pour un filtre passe bas, on a : $\underline{T} = \frac{To}{1 + j\frac{F}{Fo}}$

<u>Si on veut le module, on a :</u>

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + j\left(\frac{F}{Fo}\right)^2}}$$

Ne pas hésiter à prendre le temps de comprendre le détail des calculs ci-dessous, ce n'est pas la difficulté qui prédomine, mais un manque de rigueur pourrait fausser la suite de l'exercice.

$$G = 20 \times \log T = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + j\left(\frac{F}{Fo}\right)^2}}$$

$$G = 20 \times \log 1 - \log \sqrt{(1)^2 + j\left(\frac{F}{Fo}\right)^2} \longrightarrow \log(a/b) = \log(a) - \log(b)$$

$$G = -20 \times 0.5 \times \log \left[(1)^2 + j\left(\frac{F}{Fo}\right)^2\right]^{0.5} \longrightarrow \sqrt{a} = a^{0.5}$$

$$\boxed{G = -10 \times \log\left[1 - \frac{F}{Fo}\right]}$$

<u>Et pour l'argument de T :</u>

$$\text{Arg } T = \text{Arg } 1 - \text{Arg}\left(1 + j\frac{F}{Fo}\right)$$

$$= 0 - \tan^{-1}\left(\frac{F}{Fo}\right)$$

$$\boxed{\text{Arg } t = -\tan^{-1}\left(\frac{F}{Fo}\right)}$$

L'étude de notre filtre passe-bas, et ainsi achevé. Pour information complémentaire, nous allons étudier le comportement du filtre en fonction de la fréquence. Avant tout, un rappel des formules :

Déphasage	Transmittance	Gain
$\text{Arg } t = -\tan^{-1}\left(\frac{F}{Fo}\right)$	$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + j\left(\frac{F}{Fo}\right)^2}}$	$G = 20 \log T$

<u>Quand F-> 0 :</u>

Déphasage	Transmittance	Gain
$\text{Arg } t = -\tan^{-1}\left(\frac{0}{0}\right)$ $\text{Arg } T = 0$	$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + j\left(\frac{0}{0}\right)^2}}$ $T=1$	$G = 20 \log 0$ $G=0dB$

<u>Quand F = Fo :</u>

Déphasage	Transmittance	Gain
$\text{Arg } t = -\tan^{-1}\left(\frac{F}{Fo}\right)$ $\text{arg } T = -45°$	$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + j\left(\frac{1}{1}\right)^2}}$ $T = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$G = 20 \log T$ $G = -3dB$

Quand F -> l'infini :

Déphasage	Transmittance	Gain
$\text{Arg } t = -\tan^{-1}\left(\frac{F}{Fo}\right)$ arg T -> - 90°	T -> 0	G = 20 log T G -> -∞

Détermination de la fréquence de coupure Fc :

DEF	La fréquence de coupure, est la fréquence pour laquelle on a : **G = G max – 3dB** Ainsi que : $T = \frac{T\,max}{\sqrt{2}}$

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + j\left(\frac{F}{Fc}\right)^2}} \quad \text{quand } F = Fc, \text{ on a } \quad \underline{T} = \frac{1}{\sqrt{(1)^2 + j\left(\frac{1}{1}\right)^2}}$$

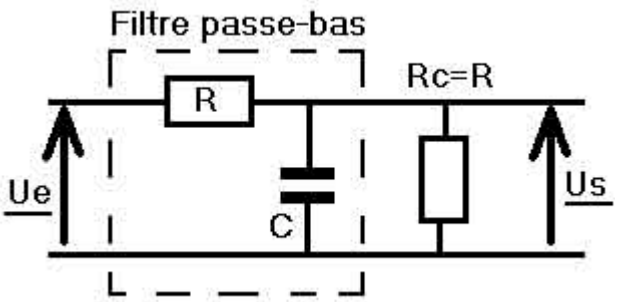
$$\text{et on sait que } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}$$

$$\text{Par identification, on trouve } \left[\frac{Fc}{Fo}\right]^2 = 1$$

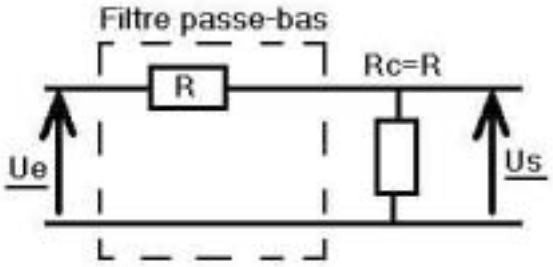
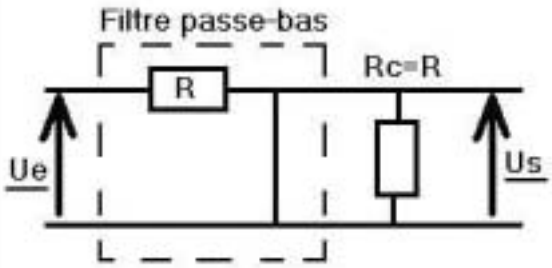
$$\boxed{Fc = Fo = \frac{1}{2\pi RC}}$$

9. Le filtre passe bas passif chargé

Par « charge », il faut comprendre, qu'en sortie du filtre on connecte un élément. Ce dernier va influencer ce fonctionnement du filtre passe-bas. Dans notre cas, cet élément est résistif, mais il pourrait aussi être inductif, capacitif, ou résulté d'une association.



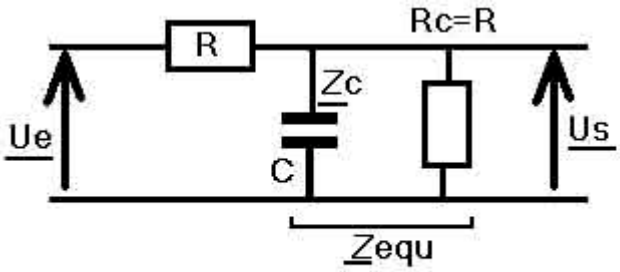
On va raisonner sur les deux cas de figure suivants :

F -> 0	F -> + ∞
 Le condensateur se comporte comme un circuit ouvert.	 Le condensateur se comporte comme un court-circuit (un fil).

De part ce raisonnement quantitatif, nous pouvons déterminer la transmittance, en prenant en compte le fait que la charge R est égale à Rc :

F -> 0	F -> + ∞
$\underline{T} = \frac{\underline{U}s}{\underline{U}e}$ $\underline{U}s = \underline{U}e \times \frac{R}{R+R}$ $\underline{T} = \frac{\cancel{\underline{U}e} \times \frac{R}{R+R}}{\cancel{\underline{U}e}}$ $\underline{T} = \frac{R}{R+R} \boxed{= \frac{1}{2} = \underline{T}}$	$\underline{T} = \frac{\underline{U}s}{\underline{U}e} = 0$

On peut donc en déduire, qu'un filtre passe bas, une fois chargé, reste un filtre passe-bas, mais sa transmittance est divisée par 2 (si Rc=R).
Par suite, nous cherchons à connaître la transmittance du filtre, par le calcul :



$$\underline{T} = \frac{\underline{Z}equ}{\underline{Z}equ + \underline{Z}r}$$

Pour simplifier cette expression, on multiplie par l'admittance de Zequ, de façon à avoir "1", au numérateur.

$$\underline{T} = \frac{\underline{Z}equ}{\underline{Z}equ + \underline{Z}r} \times \frac{\underline{Y}equ}{\underline{Y}equ} = \frac{1}{1 + (\underline{Y}equ \times \underline{Z}r)}$$

$$= \frac{1}{1 + R\left(\frac{1}{R} + jCw\right)} = \frac{1}{1 + 1 + jRCw} = \boxed{\frac{1}{2 + jRCw} = \underline{T}}$$

Afin de rendre utilisable cette expression, il faut la mettre sous la forme élémentaire :

$$\underline{T} = \frac{1}{2 + jRCw}$$ on va diviser tout par 2:

$$\underline{T} = \frac{\frac{1}{2}}{\left[\frac{2 + jRCw}{2}\right]} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{jRCw}{2}} \boxed{= \frac{\frac{1}{2}}{1 + jRC \times \pi f}}$$

<u>On va procéder par identification :</u>

$$\underline{T} = \frac{To}{1 + j\frac{F}{Fo}} \quad \text{avec} \quad \frac{\frac{1}{2}}{1 + jRC \times \pi f}$$

$$\boxed{To = \frac{1}{2}}$$

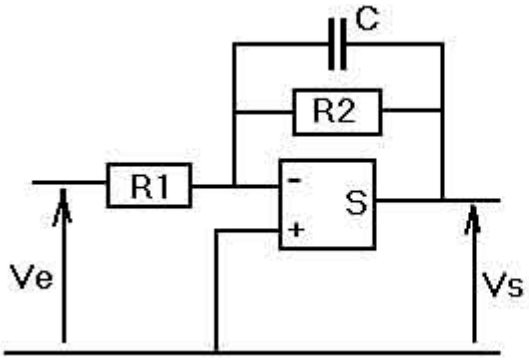
$$\frac{F}{Fo} = RC \times \pi F \quad \text{donc} \quad \frac{\cancel{F}}{Fo} = RC \times \pi \cancel{F}$$

$$\frac{1}{Fo} = RC \times \pi \qquad \boxed{\text{soit : } Fo = \frac{1}{\pi \times RC}}$$

DONC	<u>En conclusion</u>, on peut dire, que les caractéristiques du **<u>filtre passe bas passif</u>**, varient suivant qu'il est en charge où s'il est à vide (non chargé) : - la transmittance maximum diminue si le filtre est chargé - la fréquence de coupure augmente si le filtre est chargé.

10. <u>Le filtre passe-bas actif :</u>

Nous avons précédemment fait la démonstration pour le filtre passe bas passif, et avons constaté que ce dernier présenté l'inconvénient de voir varier ces caractéristiques en fonction de sa charge. Le filtre passe-bas actif, offre l'avantage de conserver ces propriétés indépendamment de la charge.



ADI parfait:
on a i+ = i- = 0A
Ud = 0, donc Ve+ = Ve-

On reconnaît un montage inverseur. On peut exprimer la transmittance (T) de ce dernier :

$$T = -\frac{Zequ}{Z_{R1}}$$

$$T = -\frac{Zequ}{Z_{R1}} \times \frac{Yequ}{Yequ} = -\frac{1}{Yequ \times Z_{R1}}$$

$$= -\frac{1}{R1\left(\frac{1}{R2} + jCw\right)} \boxed{= -\frac{1}{\frac{R1}{R2} + jR_1 \times Cw}}$$

<u>On met sous la forme d'un filtre passe-bas :</u>

$$T = -\frac{1}{\frac{R1}{R2} + jR_1 \times Cw} = -\frac{1}{\frac{R1}{R2} + jR_1 \times Cw} \times \frac{\left[\frac{R2}{R1}\right]}{\left[\frac{R2}{R1}\right]}$$

$$= -\frac{1 \times \left[\frac{R2}{R1}\right]}{\left[\frac{R1}{R2} + jR_1 \times Cw\right] \times \left[\frac{R2}{R1}\right]} = -\frac{\frac{R2}{R1}}{\frac{R1 \times R2}{R2 \times R1} + jR_1\, Cw \times \frac{R2}{R1}}$$

$$\boxed{T = \frac{-\frac{R2}{R1}}{1 + jR_2 Cw}}$$

<u>On va procéder par identification :</u>

$$T = \frac{-\frac{R2}{R1}}{1 + jR_2Cw} \quad \text{avec} \quad \underline{T} = \frac{To}{1 + j\frac{F}{Fo}}$$

$$\frac{F}{Fo} = R_2C \times 2\pi F$$

$$\frac{\cancel{F}}{Fo} = R_2C \times 2\pi \cancel{F}$$

$$\boxed{To = -\frac{R2}{R1}} \qquad \boxed{Fo = \frac{1}{R_2C \times 2\pi}}$$

Comme nous travaillons avec un filtre passe bas, la fréquence de coupure, sera égale à :

$$Fc = Fo = \frac{1}{R_2C \times 2\pi}$$

On va maintenant exprimer le gain et la phase, de notre filtre passe-bas actif :

$$\underline{T} = \frac{To}{1 + j\frac{F}{Fo}} \quad \text{avec} \quad To = -\frac{R2}{R1} \quad \text{et} \quad Fo = \frac{1}{R_2C \times 2\pi}$$

$$T = \frac{|To|}{\sqrt{1 + \left[\frac{F}{Fo}\right]^2}}$$ on calcul le module de l'argument "T"

$$G = 20 \log T$$

$$G = 20 \log T = 20 \log \frac{|To|}{\sqrt{1 + \left[\frac{F}{Fo}\right]^2}}$$

$$G = 20 \log |To| - 10 \log \left[1 + \left[\frac{F}{Fo}\right]^2\right]$$

$$\varphi = \arg T$$

$$\varphi = \arg T \qquad \varphi = \text{Arg } To - \text{Arg}\left[1 + j\frac{F}{Fo}\right]$$

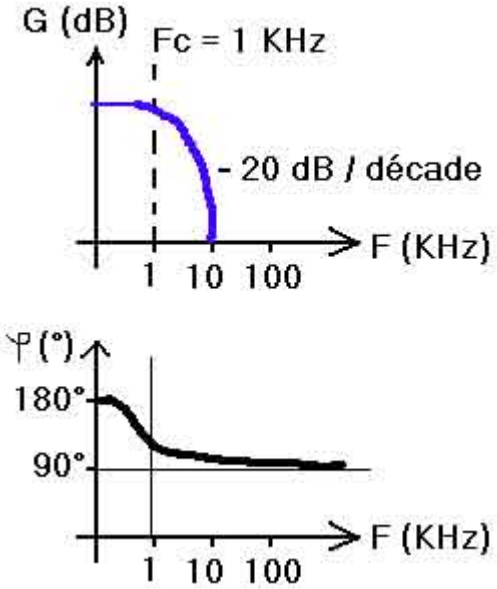
$$\varphi = \pi - \tan^{-1}\left[\frac{F}{Fo}\right]$$

Afin de synthétiser le fonctionnement de notre filtre passe-bas, résumons dans un tableau les différents comportements du filtre :

F (Hz)	0	Fo	10 x Fo	100 x Fo	+ ∞
T	10	7.07	1	0.1	0
G (dB)	20	17	0	- 20	- ∞
φ (°)	180	135	96	91	90

Pour ceux qui voudraient refaire l'application numérique, il convient de savoir que les valeurs numériques sont les suivantes :
R1 = 3,3 Kohms
R2 = 33 Kohms
C = 4,7nF

Graphiquement, on obtient les courbes de Bode, suivante :



DONC	En conclusion : - La **courbe de gain** est translaté vers le haut, pour un filtre passe-bas actif - **L'impédance d'entrée** du filtre est égale à l'impédance de la résistance présenté en entrée (ici, il s'agit de R1). - **L'impédance de sortie** est nulle (c'est une caractéristique propre à l'amplificateur opérationnel).

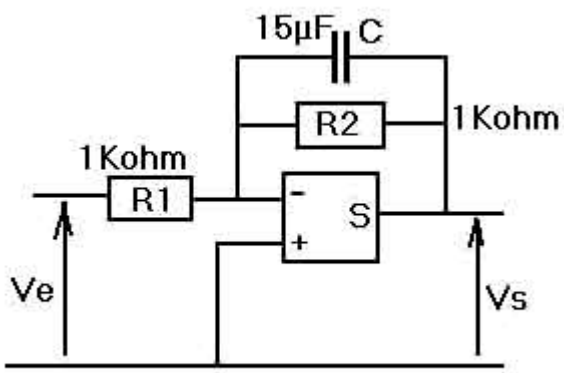
11. Application des filtres passe-bas : le moyenneur

On possède un signal périodique est on cherche à connaître sa valeur moyenne. On sait que la valeur moyenne est visualisable en DC sur le voltmètre. La valeur moyenne correspond à la valeur de la tension quand la fréquence est nulle, donc quand F = 0Hz. Pour la mesurer, nous allons réaliser un filtre passe-bas, qui va avoir une fréquence de coupure extrêmement basse : il ne va laisser passer que les signaux continus.

On peut réaliser le « moyenneur » avec :

- un filtre passe-bas actif (ce qui est plus avantageux, car on peut réaliser une amplification)
- un filtre passe-bas passif (à condition de prendre en compte la charge connectée (si elle existe!), pour ne pas fausser les calculs).

Soit le montage suivant :



ADI parfait:
on a i+ = i- = 0A
Ud = 0, donc Ve+ = Ve-

$$Fc = Fo = \frac{1}{2\pi RC} = 1Hz$$

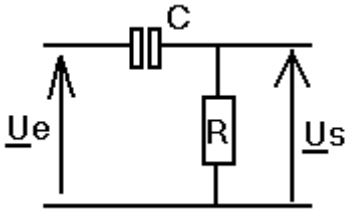
Fc = Fo = 1Hz
To = - 1

Avec une fréquence de coupure située à 1Hz, seule les signaux de fréquence inférieure à 1Hz pourront traverser le filtre. Si le signal d'entrée est de 100Hz, on voit bien que seul la composante continue (correspondant à la valeur moyenne), pourra traverser le filtre, les harmonique, ayant des fréquences supérieurs à celle du fondamental, ne pourront (hélas !) traverser notre filtre.

Dans notre exemple, on à une transmittance négative, et égale à 1, cela est du au fait que les deux résistances ont la mêmes valeur. Le signe est négatif, car nous sommes en présence d'un montage « inverseur » : pour s'en souvenir il suffit de regarder sur quelle broche de l'AO est présenté la tension d'entrée : ici « Ve », est présenté sur l'entrée «E - », c'est donc un inverseur.

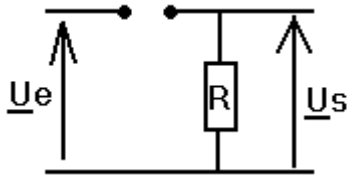
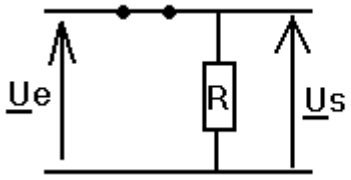
Le filtre passe-haut passif:

1. **Le montage :**



$$\underline{T} = \frac{\underline{Ue}}{\underline{Us}}$$

2. **L'analyse qualitative :**

BF	HF
En BF, le condensateur, se comporte comme un circuit ouvert	En HF, le condensateur, se comporte comme un fil (un court-circuit)
 $\underline{Us} = 0V$	 $\underline{Us} = \underline{Ue}$

Le quadripôle, s'oppose aux passage des signaux basse fréquence, c'est donc un filtre passe-haut.

3. **Etude de la transmittance :**

On utilise le diviseur de tension, car on a un filtre passif :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Us}}{\underline{Ue}} \qquad \underline{Us} = \underline{Ue} \times \frac{\underline{Zr}}{\underline{Zr} + \underline{Zc}}$$

$$\underline{T} = \frac{\cancel{\underline{Ue}} \times \dfrac{\underline{Zr}}{\underline{Zr} + \underline{Zc}}}{\cancel{\underline{Ue}}}$$

$$\underline{T} = \frac{\underline{Zr}}{\underline{Zr} + \underline{Zc}} \times \frac{\underline{Yr}}{\underline{Yr}} \qquad \boxed{\underline{T} = \frac{1}{1 \times (\underline{Yr} \times \underline{Zc})}}$$

On remplace ensuite par les admittances et impédances :

$$\underline{T} = \frac{1}{1 \times \left(\frac{1}{R} \times \frac{-1}{jCw}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jRCw}} = \boxed{\frac{1}{1 - \frac{j}{RCw}}}$$

On passe ensuite cette expression sous la forme élémentaire du filtre passe-haut :

$$\underline{T} = \frac{To}{1 - j\left(\frac{Fo}{F}\right)}$$

Forme élémentaire filtre passe-haut

Par identification, on a To = 1

Pour le calcul de Fo, il faut faire quelques lignes de calculs :

$$\frac{Fo}{F} = \frac{1}{RCw} = \frac{1}{2\pi f RC}$$

La fréquence « Fo », est identique pour un filtre passe-bas ou un filtre passe-haut.

$$\frac{Fo}{\cancel{F}} = \frac{1}{2\pi \cancel{f} RC}$$

$$\boxed{Fo = \frac{1}{2\pi RC}}$$

4. **Expression de la bande passante :**

Comme son nom l'indique, ce filtre ne laisse passer que les signaux de fréquences hautes, sa bande passante sera donc :

$$BP = [\ Fo ; +\infty\ ]$$

5. **Expression du module T :**

On a trop souvent tendance, à faire l'erreur de laisser le « j » dans l'expression du module, sachez que ce dernier n'est présent dans l'expression de T, que si le « T » est souligné.

$$T = \frac{To}{\sqrt{1 + j\left(-\frac{Fo}{F}\right)^2}}$$

Cette expression comporte un signe négatif devant le rapport « Fo / F », il ne faut pas l'oublier en théorie. En pratique, on va faire une élévation au carré, ce qui aura pour conséquence de neutraliser le signe négatif.

6. **Expression du Gain G :**

$$G = 20 \times \log T$$

$$G = 20 \times \log\left[\frac{To}{\sqrt{1 + j\left(-\frac{Fo}{F}\right)^2}}\right]$$

$$= (\ 20 \times \log To\ ) - 20 \times \log\left[\ 1 + \left(-\frac{Fo}{F}\right)^2\right]$$

$$\boxed{G = -\ 10 \times \log\left[\ 1 + \left(-\frac{Fo}{F}\right)^2\right]}$$

7. **Expression du déphasage :**

$$\arg \underline{T} = -\tan^{-1}\left(-\frac{Fo}{F}\right)$$

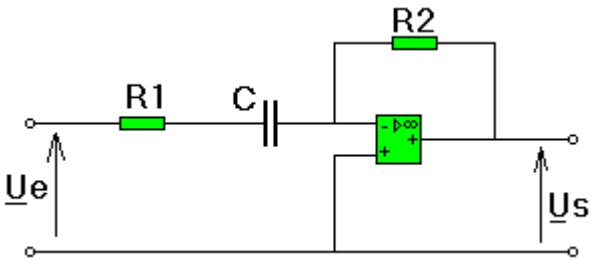
$$\boxed{\varphi = -\tan^{-1}\left(-\frac{Fo}{F}\right)}$$

8. Tableau synthétique du comportement du filtre passe-haut passif:

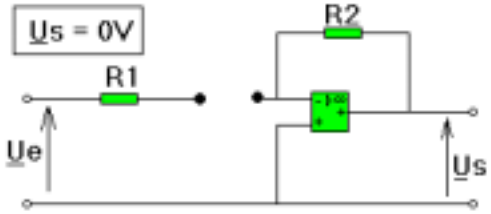
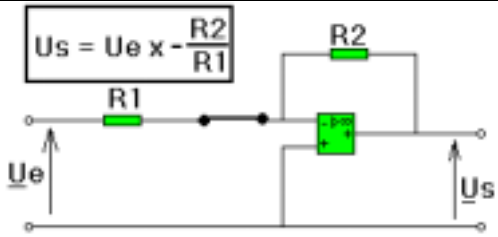
	F -> 0	F = Fo	F - > l'infini
T	0	1 /√2	1
G (dB)	Moins l'infini	- 3 dB	0
Déphasage (°)	+ 90°	+ 45°	0°

Le filtre passe-haut actif :

1. Schéma :



2. Etude qualitative :

BF		HF
En BF, le condensateur, se comporte comme un circuit ouvert		En HF, le condensateur, se comporte comme un fil (un court-circuit)
		

3. Etude de la transmittance :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Us}}{\underline{Ue}} = -\frac{\underline{Z}R2}{\underline{Z}equ} \times \frac{\underline{Y}R2}{\underline{Y}R2}$$

$$\boxed{\underline{Z}equ = R1 + \frac{1}{jCw}}$$

$$\underline{T} = -\frac{1}{\underline{Z}equ \times \underline{Y}R2}$$

$$\underline{T} = -\frac{1}{\left(R1 + \frac{1}{jCw}\right) \times \frac{1}{R2}}$$

$$\boxed{\underline{T} = -\frac{1}{\left(\frac{R1}{R2} + \frac{1}{jCw \times R2}\right)}}$$

On transforme cette expression de façon à retrouver une compatibilité avec la forme élémentaire du filtre passe-haut :

$$\underline{T} = -\frac{1}{\left(\frac{R1}{R2} + \frac{1}{jCw \times R2}\right)} \times \frac{\frac{R2}{R1}}{\frac{R2}{R1}}$$

$$\underline{T} = -\frac{\frac{R2}{R1}}{\frac{R2}{R1} \times \frac{R1}{R2} + \frac{1}{jCw \times R2} \times \frac{R2}{R1}}$$

$$\underline{T} = -\frac{\frac{R2}{R1}}{1 + \frac{R2}{jCw \times R2 \times R1}}$$

$$\boxed{\underline{T} = -\frac{\frac{R2}{R1}}{1 + \frac{1}{jCw \times R1}}}$$

On peut ensuite identifier avec la forme élémentaire du filtre passe-haut :

$$\underline{T} = \frac{To}{1 - j\left(\frac{Fo}{F}\right)}$$

$$\boxed{To = \frac{R2}{R1}}$$

$$\frac{Fo}{F} = \frac{1}{R1 \times C \times 2\pi F}$$

$$\frac{Fo}{\cancel{F}} = \frac{1}{R1 \times C \times 2\pi \cancel{F}}$$

$$\boxed{Fo = \frac{1}{R1 \times C \times 2\pi}}$$

4. <u>Etude du module du module de la transmittance :</u>

$$T = \frac{\left|-\frac{R2}{R1}\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\frac{Fo}{F}\right)^2}}$$

$$G = 20 \times \log T$$

$$= 20 \times \log|To| - 20 \times \log\left[1 + \left(-\frac{Fo}{F}\right)^2\right]^{0.5}$$

$$\boxed{\sqrt{a} = a^{0.5}}$$

$$\boxed{G = 20 \times \log|To| - 10 \log\left[1 + \left(-\frac{Fo}{F}\right)^2\right]}$$

5. Etude du déphasage

$$\varphi = \arg To - \mathrm{Arg}\left[1 + j\left(-\frac{Fo}{F}\right)\right]$$

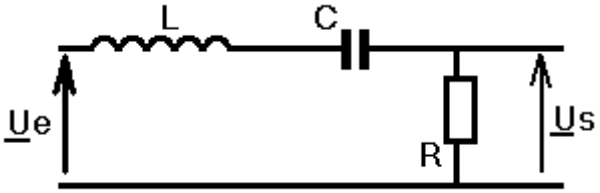
$$= 180 - \tan^{-1}\left(-\frac{Fo}{F}\right)$$

$$\boxed{\varphi = 180 + \tan^{-1}\left(\frac{Fo}{F}\right)}$$

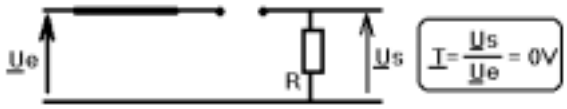
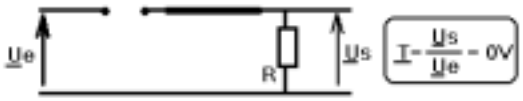
6. Tableau synthétique du comportement du filtre passe-haut actif :

Le filtre passe-bande passif :

1. Schéma du filtre à circuit RLC série :



2. Analyse qualitative :

BF		HF
En BF, le condensateur, se comporte comme un circuit ouvert, et la bobine comme un fil.		En HF, le condensateur, se comporte comme un fil (un court-circuit), et la bobine comme un circuit ouvert.
		

D'après notre étude qualitative, on voit qu'en haute et en basse fréquence, ce quadripôle s'oppose au passage des signaux. Mais on sait que pour la fréquence F = Fo (qui est la fréquence de résonance en intensité), on a le quadripôle qui se conduit comme un élément résistif (la partie imaginaire est nulle), ce qui nous donne :

$$\underline{Z}_{RLC} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$$
$$= R + jLw + \frac{1}{jCw}$$
$$= R + jLw - \frac{j}{Cw}$$
$$\boxed{= R + j\left(Lw - \frac{1}{Cw}\right)}$$

$$F = Fo$$
$$Lw - \frac{1}{Cw} = 0$$
$$LCw^2 = 0$$
$$w = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \boxed{Fo = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

On peut donc conclure qu'en BF, et en HF, le signal est atténué, mais il passe uniquement à la fréquence Fo. Nous avons bien un filtre passe-bande (qui ne laisse passer qu'une bande de fréquences).

3. Expression de la transmittance :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Us}}{\underline{Ue}} = \frac{\underline{Zr}}{\underline{Zr} + \underline{Zc} + \underline{Z}_L} = \frac{\underline{Zr}}{\underline{Zr} + \underline{Zc} + \underline{Z}_L} \times \frac{\underline{Yr}}{\underline{Yr}}$$
$$\boxed{= \frac{1}{1 + (\underline{Z}_L + \underline{Zc}) \times \underline{Yr}}}$$
$$= \frac{1}{1 + \left(jLw + \frac{1}{jCw}\right)\frac{1}{R}} = \boxed{\frac{1}{1 + j\left(\frac{Lw}{R} + \frac{1}{RCw}\right)}}$$

On va comparer cette expression à la forme élémentaire de l'expression de la transmittance d'un filtre passe-bas :

$$\boxed{\underline{T} = \frac{To}{1 + j\,Qo\left(\frac{F}{Fo} - \frac{Fo}{F}\right)}}$$

Avec :

- **To** qui est un réel
- **Qo**, qui est le facteur de qualité du circuit à **Fo**. Avec **Qo** > 0
- **Fo**, la fréquence de résonance maximale

On peut maintenant exprimer **To**, **Qo**, et **Fo**, par identification :

To = 1

$$\frac{F \times Qo}{Fo} = \frac{Lw}{R} = \frac{2\pi F \times L}{R} \qquad \boxed{\frac{Qo}{Fo} = \frac{2\pi L}{R}}$$

$$\frac{Qo \times Fo}{F} = \frac{1}{RCw} = \frac{1}{RC \times 2\pi F} \qquad \boxed{Qo \times Fo = \frac{1}{RC \times 2\pi}}$$

On peut ensuite simplifier ces expressions :

$$(1)\ \frac{Qo}{Fo} = \frac{2\pi L}{R} \qquad (2)\ Qo \times Fo = \frac{1}{RC \times 2\pi}$$

On multiplie (1) par (2), de façon à trouver Qo:

$$(1) \times (2) = \frac{Qo}{\cancel{Fo}} \times Qo \times \cancel{Fo} = Qo^2$$

$$Qo^2 = \frac{L\,\cancel{2\pi}}{R} \times \frac{1}{\cancel{2\pi}RC} = \frac{L}{R} \times \frac{1}{RC}$$

$$Qo^2 = \frac{1}{R^2 C} \quad \text{donc } Qo = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} \qquad \boxed{Qo = \frac{1}{R} \times \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

On peut aussi déterminer Fo :

$$(1)\ \frac{Qo}{Fo} = \frac{2\pi L}{R} \qquad (2)\ Qo \times Fo = \frac{1}{RC \times 2\pi}$$

On divise (1) par (2), de façon à avoir Fo:

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{\cancel{Qo} \times Fo \times Fo}{\cancel{Qo}} = Fo^2 = \frac{1 \times \cancel{R}}{2\pi \cancel{R} \times C \times L \times 2\pi}$$

$$Fo^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 \times C \times L} \quad \text{alors} \quad \boxed{Fo = \frac{1}{2\pi \times \sqrt{LC}}}$$

4. **<u>Expression du gain :</u>**

$$G = 20 \times \log T = 20 \times \log \left[\frac{|To|}{\sqrt{1 + Qo^2 \left(\frac{F}{Fo} - \frac{Fo}{F}\right)^2}} \right]$$

$$\boxed{G = 20 \times \log |To| - 10 \times \log \left(1 + Qo^2 \left(\frac{F}{Fo} - \frac{Fo}{F}\right)^2\right)}$$

5. **<u>Expression de l'argument :</u>**

$$\varphi = \arg To - \operatorname{Arg}\ 1 + Qo \left(\frac{F}{Fo} - \frac{Fo}{F}\right)$$

$$\boxed{\varphi = -\tan^{-1}\left(\frac{F}{Fo} - \frac{Fo}{F}\right)}$$

6. **<u>Synthèse sur le comportement du filtre passe-bande :</u>**

	BF	**F = Fo**	**HF**
Gain (dB)	Moins l'infini	0 dB	Moins l'infini
T	0	1	0
Déphasage (arg <u>T</u>)	+ 90°	0 (car le quadripôle n'est que résistif)	- 90°

7. Expression des fréquences de coupure haute (F_{CH}) et basse (F_{CB}) :

La démonstration est assez ardue, c'est pourquoi, on se contentera de connaître les expressions finales, ci-dessous :

$$F_{CB} = \frac{Fo}{2\,Qo}\left(-1 + \sqrt{1 + 4Qo^2}\right)$$

$$F_{CH} = \frac{Fo}{2\,Qo}\left(1 + \sqrt{1 + 4Qo^2}\right)$$

8. Expression de la bande passante :

$$BP = F_{CH} - F_{CB} \qquad BP = \frac{Fo}{Qo}$$

On peut exprimer la bande passant en fonction des différents éléments du montage :

$$Qo = \frac{1}{R} \times \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad Fo = \frac{1}{2\pi \times \sqrt{L\,C}}$$

$$BP = \frac{Fo}{Qo} = \frac{1}{2\pi \times \sqrt{L\,C}} \times R \times \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$BP = \frac{1}{2\pi \times L}$$

On peut donner l'interprétation suivante : plus Qo est grand, et plus la bande passante sera sélective.

L'amplificateur sélectif à circuit RLC parallèle :

DEF	L'amplificateur sélectif est un filtre passe-bande, dont la bande passante est très petite devant la fréquence Fo du maximum.

On néglige le "1", dans l'expression $\sqrt{1 + 4Qo^2}$
car Qo est trés grand devant "1".

$$F_{CB} = \frac{Fo}{2\,Qo}\left(-1 + \sqrt{1 + 4Qo^2}\right) = \frac{Fo}{2\,Qo}\left(-1 + 2\,Qo\right)$$

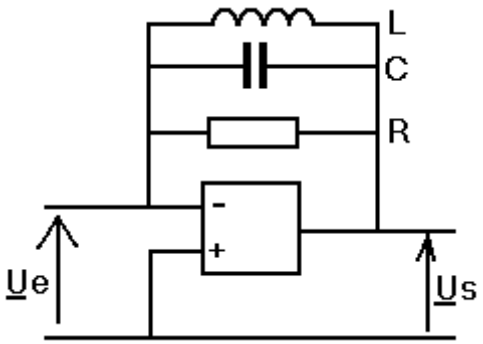
$$F_{CH} = \frac{Fo}{2\,Qo}\left(1 + \sqrt{1 + 4Qo^2}\right) = \frac{Fo}{2\,Qo}\left(1 + 2\,Qo\right)$$

On peut ensuite simplifier en développant les expressions:

$$F_{CB} = \left[\frac{Fo}{2\,Qo} \times -1\right] + \frac{2Qo \times Fo}{2Qo} = Fo - \frac{Fo}{2Qo} = \boxed{Fo - \frac{BP}{2} = F_{CB}}$$

$$F_{CH} = \left[\frac{Fo}{2\,Qo} \times 1\right] + \frac{2Qo \times Fo}{2Qo} = Fo + \frac{Fo}{2Qo} = \boxed{Fo + \frac{BP}{2} = F_{CH}}$$

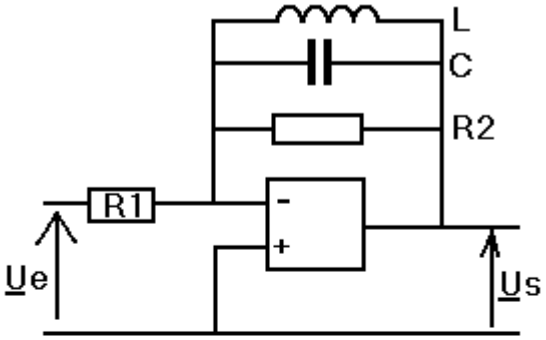
1. Schéma du montage :



L'amplificateur opérationnel, fonctionne en mode linéaire, car une contre réaction est établi entre l'entrée inverseuse (E-), et la sortie. De plus les courants d'entrées sont nuls.

2. Etude de ce filtre

On reconnaît un montage inverseur, on cherche donc à exprimer la transmittance :



$$\boxed{\underline{T} = \frac{-\underline{Z}equ}{\underline{Z}R1}}$$

$$\underline{T} = \frac{-\underline{Z}equ}{\underline{Z}R1} \times \frac{\underline{Y}equ}{\underline{Y}equ} = \frac{-1}{\underline{Z}R1 \times \underline{Y}equ}$$

$$\underline{T} = \frac{-1}{\underline{Z}R1 \times \underline{Y}equ} \qquad \underline{T} = \frac{-1}{R1 \times \left[\frac{1}{R2} + jCw + \frac{1}{jLw}\right]} \qquad \underline{T} = \frac{-1}{\left[\frac{R1}{R2} + jR_1Cw + \frac{R_1}{jLw}\right]}$$

Pour faire apparaitre un "1", au dénominateur, on multiplie par R2 / R1 :

$$\underline{T} = \frac{-1}{\left[\frac{R1}{R2} + jR_1Cw + \frac{R_1}{jLw}\right]} \times \frac{\frac{R2}{R1}}{\frac{R2}{R1}} \qquad \boxed{\underline{T} = \frac{-\frac{R_2}{R1}}{1 + j\left(R_2Cw - \frac{R_2}{Lw}\right)}}$$

On identifie ensuite avec la forme élémentaire du filtre passe-bande :

$\underline{T} = \dfrac{-\frac{R_2}{R1}}{1 + j\left(R_2Cw - \frac{R_2}{Lw}\right)}$	$\underline{T} = \dfrac{To}{1 + j\,Qo\left(\frac{F}{Fo} - \frac{Fo}{F}\right)}$

Ce qui nous donne par identification :

$(1)\text{: } Qo \times \frac{F}{Fo} = R_2 Cw$	$(2)\text{: } Qo \times \frac{Fo}{F} = \frac{R_2}{Lw}$

On peut simplifier ces expressions:

$$(1)\text{: } Qo \times \frac{\cancel{F}}{Fo} = R_2 C \times 2\pi \cancel{F}$$

$$(2)\text{: } Qo \times \frac{Fo}{\cancel{F}} = \frac{R_2}{L\, 2\pi \cancel{F}}$$

Exprimons Qo,et Fo:

$$(1) \times (2) = \left[Qo \times \frac{F}{Fo}\right]\left[Qo \times \frac{Fo}{F}\right] = Qo^2$$

$$= \left[R_2 Cw\right]\left[\frac{R_2}{Lw}\right] = R_2^{\,2} \times \frac{C}{L}$$

$$\boxed{Qo = R2 \times \sqrt{\frac{C}{L}}}$$

$$(1)\,/\,(2) = \frac{\left[Qo \times \frac{F}{Fo}\right]}{\left[Qo \times \frac{Fo}{F}\right]} = Fo^2$$

$$= \frac{R_2}{L\, 2\pi} \times \frac{1}{R_2 C \times 2\pi}$$

$$\boxed{Fo = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

$$\underline{To} = -\frac{R2}{R1}$$