

Référence du cours : **HY1 MATH2**

Titre court : **EDP**

Titre long : **Equations aux Dérivées Partielles et Systèmes  
Différentiels en Variables Réelles et Complexes**

*Cours* (18H) : R. Ababou (8H) et W. Bergez (10H), ENSEEIHT

*TD* (16H) : A. Ghaus et A. Couzinet

*Partiel* (2H) : R. Ababou et W. Bergez

*Projet* (8H) : R. Ababou, W. Bergez, A. Ghaus et A. Couzinet

*Polycopié* : R. Ababou et W. Bergez

*Contacts* : ababou@imft.fr, bergez@imft.fr, ghaus@imft.fr, couzinet@imft.fr

*L'objectif pédagogique de ce cours est que l'étudiant puisse acquérir les savoir-faire nécessaires pour mieux assimiler et valoriser son cursus en mécanique des fluides (et autres disciplines physiques) :*

- *savoir classer une EDP et la caractériser ;*
- *connaître les techniques classiques de résolution des EDP : réduction d'ordre, séparation de variables, bases de fonctions propres complexes (séries de Fourier généralisées), transformations intégrales de Fourier et Laplace en variables complexes, fonctions de Green.*
- *connaître les propriétés physiques des principaux modèles et des équations de transport utiles en mécanique (diffusion, advection, propagation).*

## 1 1er Semestre : Classification des EDP, solutions fondamentales et techniques de résolution

### 1.1 Introduction - EDO, SDO.

**Cours 1 (R. Ababou)** : Equations Différentielles Ordinaires : linéarité, homogénéité, formes implicites, explicites. Problèmes différentiels à conditions initiales, théorème de Cauchy-Peano. Problèmes à conditions aux limites. Exemples.

**TD 1** : Méthode du facteur intégrant : eq. de Streeter-Phels (modèle BOD, oxygénation - désoxygénation d'un cours d'eau). Distribution stationnaire de température dans un barreau refroidi par un fluide. Eq. de Bernoulli et de Ricatti : chute d'un corps à traînée quadratique. Equation de diffusion-advection 1D stationnaire : influence du nombre de Péclet et couche limite.

### 1.2 EDP et systèmes d'EDP - Classification.

**Cours 2 (R. Ababou)** : EDP linéaires, quasi-linéaires, semi-linéaires, non linéaires. Transformations de variables. Systèmes d'EDP du 1er ordre. Théorème de Cauchy-Kowalevska. Problème bien posé. Exemples.

**Cours 3 (R. Ababou)** : Transformation EDP  $\rightarrow$  système EDP d'ordre 1, exemples. Formulation pratique du théorème de Cauchy-Kowalevska. Notion de courbe caractéristique. Interprétation : domaine de dépendance. EDP d'ordre 2 hyperboliques, paraboliques, elliptiques. Formes canoniques.

**TD 2** : Exemples de classement d'EDPs.

### 1.3 Transformée de Fourier et séparation des variables.

**Cours 4 (W. Bergez)** : Solution fondamentale de l'équation de diffusion en domaine infinie par transformée de Fourier. Interprétation. Domaine borné : équation de la chaleur dans un anneau (CL périodiques). Séparation des variables, séries de Fourier généralisées.

**TD 3** : Equation de la diffusion en milieu borné.

## 1.4 Méthode des caractéristiques (EDP hyperboliques).

**Cours 5 (R. Ababou)** : EDP hyperbolique du 1er ordre : méthode des caractéristique. Interprétation physique dans le cas de l'équation d'advection. EDP hyperbolique du 2ème ordre : équation des ondes.

**TD 4** : Transport advectif dans un champ de vitesse hétérogène 1D.

**TD 5** : Propagation d'ondes : équations linéarisées de la dynamique des gaz.

## 1.5 Points sources et solutions fondamentales (fonctions de Green).

**Cours 6 (W. Bergez)** : Problème du point source pour l'équation de la chaleur (parabolique); solution fondamentale sous forme intégrale. Cas de l'équation des ondes (hyperbolique) et de l'équation de Poisson (elliptique). Interprétation.

# 2 2ème Semestre : Méthodes de la variable complexe.

## 2.1 Méthode de la transformation conforme (EDP de Laplace).

**Cours 7 (W. Bergez)** : Equation de Laplace. Variable complexe. Fonctions analytiques. Théorème de Cauchy. Exemples.

**TD 6** : Solution fondamentale de l'équation de la diffusion par la méthode de la transformée de Fourier (intégration dans le plan complexe). Fonction contrainte d'Airy dans les écoulements de Stokes; application à l'écoulement de Poiseuille.

**Cours 8 (W. Bergez)** : Transformation conforme. Exemples. Solutions de l'équation de Laplace par transformation conforme. Théorème de Riemann. Transformations du disque. Application à la mécanique des fluides.

**TD 7** : Ecoulement au-dessus d'un monticule. Ecoulement autour d'un cylindre de section elliptique. Potentiel autour d'une hémisphère, applications à la mécanique des fluides et à la conduction de la chaleur.

## 2.2 Méthode de la transformée de Laplace (problème à conditions initiales).

**Cours 9 (W. Bergez)** : Définition de la transformée de Laplace. Transformation inverse; approximation de la transformée inverse aux temps petits. Principales propriétés de la TL. Application aux EDP.

**TD 8** : Propagation d'ondes de température dans un milieu semi-infini.

## 2.3 Partiel (QCM, exercices)

## 2.4 Projets (exemples)

▷ Transfert de radionucléides dans un système matrice-fracture : transformée de Laplace; résolution d'un système d'EDP couplées.

▷ Ecoulement à travers une digue en terre par la méthode du potentiel complexe et hodographe des vitesses.

▷ Propagation d'ondes dans des milieux élastiques solides ou fluides : propagateur d'ondes (fonction de Green spatio-temporelle).

## Références

- [1] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, 1987. [3 tomes : 1-2 problèmes stationnaires; 3 problèmes d'évolution. Ouvrage de référence dans le domaine.].
- [2] Stanley J. Farlow. *Partial differential equations for scientists and engineers*. Dover, 1993. [Ouvrage très accessible, introduisant pas à pas les EDP sur des exemples de résolutions très détaillées de problèmes élémentaires de physique.].
- [3] Erich Zauderer. *Partial differential equations of applied mathematics*. John Wiley & Sons, second edition, 1989. [Ouvrage intermédiaire, couvrant les principales techniques d'analyse et de résolution des EDP, dont les méthodes de perturbation.].