Odvodi po definiciji

Odvod funkcije f v točki x je definiran kot limita diferenčnega količnika

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

1. $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

2. $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (3x^2+3xh+h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

3. $f(x) = x^n$.
Odvod lahko določimo s pomočjo formule

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x$$

kjer je $\binom{n}{k}$ binomski koeficient definiran kot

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k},$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \ldots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\binom{n}{1}x^{n-1} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}h}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n-1}xh^{n-2}}_{\to 0} + \underbrace{h^{n-1}}_{\to 0} \right) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

4. Odvod polinoma stopnje n:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Upoštevamo pravilo za odvod vsote. Odvod je

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1.$$

5. Enačba tangente na graf polinoma p v $T(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = p'(x_0)(x - x_0)$$

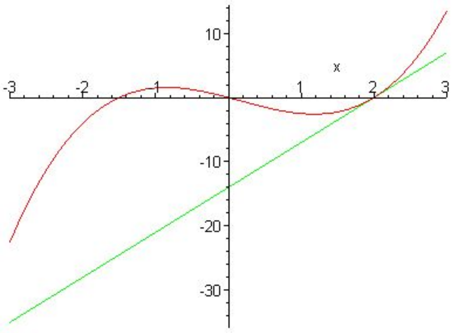
Primer: Enačba tangente na graf

$$p(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x$$

v točki $T(2, y)$. točka: $T(2, y) = T(2, p(2)) = T(2, 0)$ Odvod: $p'(x) = 3x^2 - x - 3, p'(2) = 12 - 2 - 3 = 7$ Enačba: $y - 0 = p'(2)(x - 2)$, poenostavimo:

$$y = 7x - 14$$

Slika:



6. Kako poiščemo ekstreme polinomov?
   (a) Izračunamo ničle $p'(x)$. Vse ničle so kandidati() za ekstreme.
   (b) Izračunamo vrednost $p(x)$ v vsaki ničli. Če so kandidati dobri, je v točki $(x, p(x))$ dosežen ekstrem.

   →: ustreznost kandidatov preverimo z funkcijsko vrednostjo v točkah v okolici kandidata ali enostavneje: z drugim odvodom...

7. Izračunaj odvod polinomov:
   (a) $p(x) = x^4$
   (b) $p(x) = x^{2003}$
   (c) $p(x) = x^3 + x^2 - 2x$
   (d) $p(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 2$
   (e) $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \sqrt{2}$
   (f) $p(x) = (3x^2 + 2)^2$

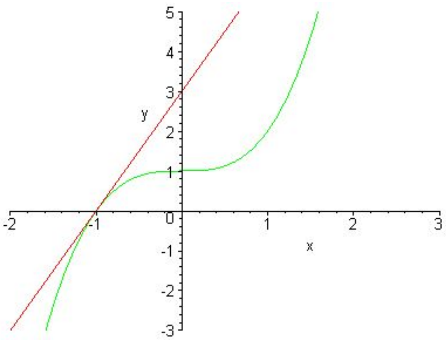
   ⇝ Rešitve:
   (a) $p'(x) = 4x^3$
   (b) $p'(x) = 2003x^{2002}$
   (c) $p'(x) = 3x^2 + 2x - 2$
   (d) $p'(x) = 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 8x$
   (e) $p'(x) = -x^2 + x$
   (f) $p'(x) = 36x^3 + 24x$

8. Poišči vrednost polinoma
$$p(x) = -3x^4 + 2x^2 - x$$
   v točkah $-2, 1, \frac{1}{2}$.

   ⇝ Rešitve:
   (a) $p'(-2) = 87$
   (b) $p'(1) = -9$
   (c) $p'(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

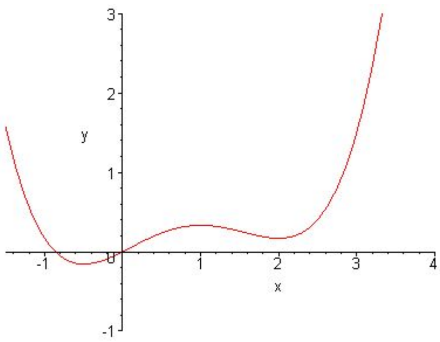
9. Določi enačbo tangente na graf polinoma p v točki T. Za prvi primer nariši še sliko.
   (a) $p(x) = x^3 + 1, T(-1, y)$
   (b) $p(x) = x^4 + x^2 - 1, T(1/2, y)$
   (c) $p(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 5, T(-1, y)$
   (d) $p(x) = 3x^2 - 9x + 4, T(1, y)$

   ⇝ Rešitve:
   (a) $y = 3x + 3$



   (b) $y = 2x - 2/3$
   (c) $y = -6x$
   (d) $y = -3x + 1$

10. *Primeri:*
   (a) Izračunaj ekstreme polinoma:
$$p(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{12}x^3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x$$
   Določimo
$$p'(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$
   Ničle $p'(x)$ poiščemo s Hornerjevim algoritmom:
$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -\frac{1}{2}$$
   Določimo še funkcijske vrednosti:
$$\begin{aligned} p(1) &= \frac{1}{3} \\ p(2) &= \frac{1}{6} \\ p(-\frac{1}{2}) &= -\frac{61}{384} \end{aligned}$$
   Ekstremi so
$$A(1, \frac{1}{3}), B(2, \frac{1}{6}), C(\frac{1}{2}, -\frac{61}{384})$$
   Poglejmo še sliko:



11. Izračunaj ekstreme polinoma:

$$p(x) = 1/16x^4 - 7/12x^3 + 15/8x^2 - 9/4x$$

Določimo

$$p'(x) = 1/4x^3 - 7/4x^2 + 15/4x - 9/4$$

Ničle $p'(x)$ poiščemo s Hornerjevim algoritmom:

$$x_1 = 3(2\times), x_2 = 1.$$

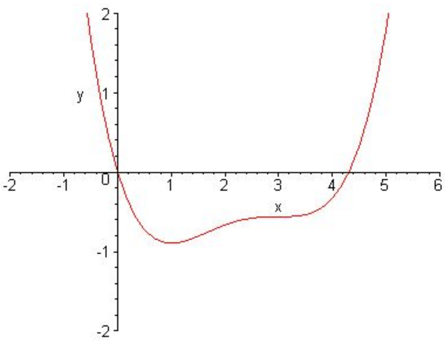
Določimo še funkcijske vrednosti:

$$\begin{aligned} p(3) &= -\frac{43}{48} \\ p(1) &= -\frac{9}{16} \end{aligned}$$

Ko preverimo funkcijske vrednosti v okolici $x = 3$, opazimo,da v $x = 3$ ni ekstrema $(p(2) = -\frac{2}{3}, p(4) = -\frac{1}{3})$. Ekstrem je

$$A(1, -\frac{9}{16})$$

Poglejmo še sliko:



12. Določi ničle, stacionarne točke, načrtaj graf:

(a) $p(x) = -4x^3 + 3x - 1$

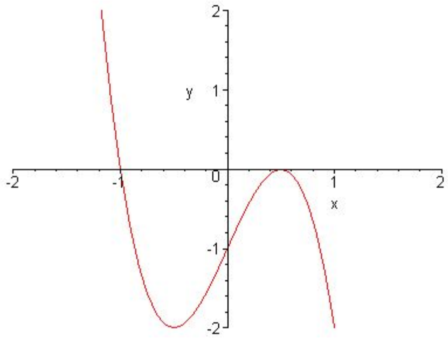
(b) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

(c) $p(x) = -2x^3 + 6x^2 - 8$

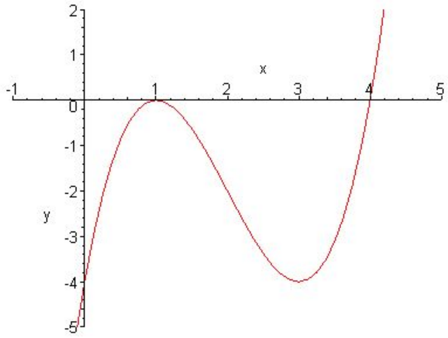
(d) $p(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 12$

$\rightsquigarrow$ Rešitve:

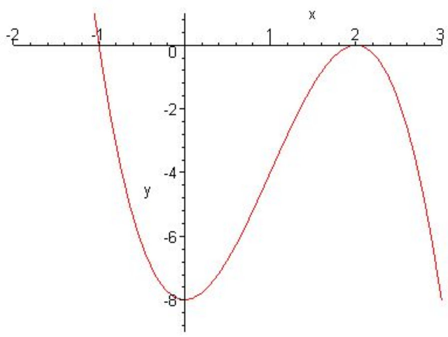
(a) ničli:$x_1 = -1, x_{2,3} = \frac{1}{2}$,
minimum $A(-\frac{1}{2}, -2)$,
maksimum $B(\frac{1}{2}, 0)$



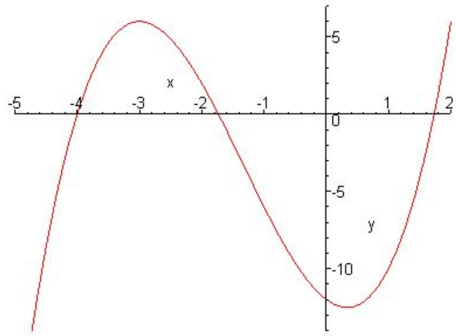
(b) ničli:$x_{1,2} = 1, x_3 = 4$,
minimum $A(3, -4)$,
maksimum $B(1, 0)$



(c) ničli:$x_1 = -1, x_{2,3} = 2$,
minimum $A(0, -8)$,
maksimum $B(2, 0)$



(d) ničli:$x_1 = -4, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}$,
minimum $A(1/3, -338/27)$,
maksimum $B(-3, 6)$


-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
5
-5
-10
x
y